

# ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE • BAND 39 • HEFT 2 • 1941

## *Gekoppelte Strahlungsfelder im kreiszylindrischen Hohlleiter* Von Herbert Buchholz

(Mitteilung aus dem Zentrallaboratorium für Fernmeldewesen der AEG)

(Mit 8 Abbildungen)

### Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird das Strahlungsfeld solcher Dipole im Innern eines vollkommen leitenden zylindrischen Hohlleiters berechnet, deren Richtung senkrecht steht auf der Achse des Hohlleiters. Als die beiden Urtypen solcher Dipole, aus denen jedes kompliziertere Sendergebilde zusammengesetzt werden kann, dienen der radiale und der tangentielle Dipol.

Für das Strahlungsfeld derartiger Dipole, mögen sie nun elektrischer oder magnetischer Natur sein, ist charakteristisch, daß es im allgemeinen auch bei vollkommen leitender Hülle aus zwei miteinander verkoppelten Teilfeldern besteht, von denen das eine ein transversal elektrisches, das andere ein transversal magnetisches Feld ist. Jedes dieser beiden Felder setzt sich wieder zusammen aus unendlich vielen Einzelfeldern, die sich voneinander durch die ständig zunehmende Zahl der Knotenstrahlen und Knotenkreise unterscheiden. Jedes Teilfeld in dieser  $2 \cdot \infty^2$ -fachen Mannigfaltigkeit von Feldern besitzt seine eigene kritische Wellenlänge, Phasengeschwindigkeit, axiale Impedanz u. a.

Das transversal magnetische Feld eines achsensenkrechten Dipols ist dem Vorhandensein elektrischer Einfachladungen in der Querschnittsebene des Dipols zuzuschreiben. Beim Dipol selbst sind das die Ladungen in seinen beiden Endpunkten. Bei einem Leiterstück endlicher Länge, der einen Strom mit vorgegebener Verteilung führt, sind es außerdem die Ladungen, die längs des Leiters stetig verteilt sind und deren Verteilungsgesetz aus dem des Stroms unmittelbar hergeleitet werden kann. Diese Ladungen haben also wesentlich den Charakter eingepprägter Ladungen, und das zugehörige transversal magnetische Feld läßt sich direkt aus dieser Ladungsverteilung bestimmen. Treten bei besonderen Sendertypen Ladungen dieser Art nicht auf, so gibt es auch kein transversal magnetisches Feld. Das ist z. B. der Fall bei einem in einer Querschnittsebene gelegenen ringförmigen Sender, dessen ihn durchfließender Strom konstante Phase und Amplitude besitzt.

Das transversal elektrische Feld eines achsensenkrechten Dipols hängt demgegenüber mit seinem Amplitudenspektrum von der Verteilung der quellenfreien elektrischen Strömung in der Ebene des Dipols ab und diese wird wesentlich bestimmt durch die Lage der Strombahnen im Querschnitt. Statt der in sich selbst oder über die Wandströmung geschlossenen Wirbelströmung kann man auch die ihr gleichwertige Doppelschicht magnetischer Ladungen betrachten. Diese haben den Charakter induzierter Ladungen, so daß das Gesetz ihrer Verteilung nicht ohne besondere Rechnung angegeben werden kann.

Im letzten Abschnitt der Arbeit wird das Strahlungsfeld einiger besonderer ringförmiger Sendertypen untersucht.

## Zusammenstellung der Formelzeichen

- $\exp(-i\omega t)$  das Zeitgesetz der Dipolschwingungen mit der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$  und  $i = \sqrt{-1}$ ,
- $g^{(e)} = \sigma - i\omega\epsilon$  die elektrodynamische Leitfähigkeit des Mediums gegenüber einem elektrischen Strom in S/cm mit  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-11}$  F/cm,
- $g^{(m)} = i\omega\mu$  die elektrodynamische Leitfähigkeit des Mediums gegenüber einem magnetischen Strom in Ohm/cm mit  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-9}$  H/cm,
- $k^2 = g^{(e)} \cdot g^{(m)}$  die Wellenzahl des Mediums in  $\text{cm}^{-2}$ ,
- $c_e = (\epsilon\mu)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $c$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer freien Raumwelle im Medium des Hohlleiters in cm/s und im Vakuum,
- $\lambda = \frac{c_e}{f}$  die zur Kreisfrequenz  $\omega$  gehörende Wellenlänge im Medium in Zentimeter,
- $\lambda = \frac{c}{f}$  die zur Kreisfrequenz  $\omega$  gehörende Vakuumwellenlänge in Zentimeter,
- $(\mu/\epsilon)^{1/2}$  der Wellenwiderstand der freien Raumwelle im Medium in Ohm,
- $\mathcal{E}, \mathcal{H}$  die elektrische und magnetische Feldstärke in V/cm und A/cm,
- $r, \varphi, z$  die Zylinderkoordinaten eines Aufpunktes,
- $f_\varphi, f_r$  die Komponenten der flächenhaften elektrischen Strömung in der Ebene  $z = 0$ ,
- $g_\varphi, g_r$  die Komponenten der flächenhaften magnetischen Strömung in der Ebene  $z = 0$ ,
- $\varrho$  der Abstand des Dipols von der Achse in Zentimeter,
- $a$  der Radius des Hohlleiters in Zentimeter,
- $\delta \mathcal{M}$  das durch  $4\pi$  dividierte Moment des Dipols,
- $\mathfrak{z}$  die axiale Impedanz einer Hohlleiterwelle in Ohm,
- $E, M$  die  $z$ -Komponenten des Hertzschen Vektors eines transversal elektrischen oder magnetischen Feldes,
- $S$  der zeitliche Mittelwert des Energiestroms der Welle durch den Querschnitt des Hohlleiters in  $W$ ,
- $j_{np}, j'_{np}$  die  $p$ -te Wurzel der Gl.  $J_n(x) = 0$  oder  $J'_n(x) = 0$ ,
- $\gamma_n$  der Neumannsche Zahlenfaktor mit  $\gamma_0 = 1$  und  $\gamma_n = 2$  für  $n = 1, 2, 3 \dots$

Die tiefgestellten Zeiger  $\xi, \varrho$  oder  $\tau$  an den Buchstaben  $E, M$  und  $\delta \mathcal{M}$  beziehen die betreffende Größe auf den Fall des axialen, radialen oder tangentialen Dipols.

1. *Einleitung und Zweck der Arbeit.* In einer älteren Arbeit hat R. Weyrich<sup>1)</sup> das Strahlungsfeld eines mit der Kreisfrequenz  $\omega$  schwingenden elektrischen und magnetischen Dipols berechnet, der in der Achse eines unendlich langen kreiszylindrischen Hohlleiters liegt und der außerdem die Richtung dieser Achse hat. Anfangs wird in der Arbeit die Annahme gemacht, daß der innere Hohlraum vom Radius  $a$  in Zentimeter und der ihn begrenzende unendlich aus-

ged  
und  
hab  
einf  
über  
end

kom  
We  
Dip  
sein

des  
jede  
die l  
sche  
eine  
einf  
von  
in d  
Her  
z-Ko

(1,1)

gedehnte Raum mit dem Hohlzylinder als Bohrung zwar homogen und isotrop sind, aber im übrigen verschiedene Materialkonstanten haben. Im Hauptteil der Arbeit wird dann jedoch zu der vereinfachenden und praktisch auch nahezu erfüllten Voraussetzung übergegangen, daß der äußere Raum als ein idealer Leiter mit unendlich großer Leitfähigkeit betrachtet werden darf.

Unter der einschränkenden Voraussetzung eines äußeren vollkommenen Leiters bildet es keine Schwierigkeit, die Rechnungen Weyrichs für den *axial* gerichteten und in der Achse gelegenen Dipol auf den Fall auszudehnen, daß der Dipol unter Beibehaltung seiner Richtung eine im übrigen beliebige Lage außerhalb der Achse

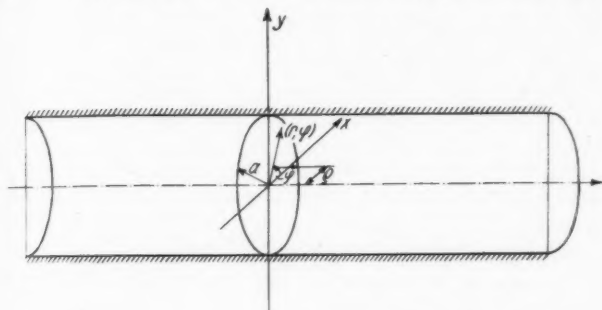


Abb. 1. Der Hohlleiter und der Dipol in ihrer Lage zum Bezugssystem der  $(r, \varphi, z)$

des inneren Hohlleiters hat. Das Strahlungsfeld des Dipols kann jedenfalls auch dann noch in allen seinen Einzelheiten durch die in die Richtung der Zylinderachse fallende  $z$ -Komponente eines Hertzschen Vektors beschrieben werden. Nur besteht die Lösung für einen aus der Achse herausgerückten Dipol nicht mehr aus einer einfach unendlichen, sondern aus einer doppelt unendlichen Reihe von Eigenfunktionen. Bei einer Einordnung des elektrischen Dipols in das zylindrische Bezugssystem gemäß Abb. 1 gilt nämlich für den Hertzschen Vektor des vollständigen Strahlungsfeldes mit der  $z$ -Komponente  $M_\alpha$  die folgende Beziehung:

$$(1.1) \quad \delta M_\alpha(r, \varphi, z) = - \frac{i \cdot \delta \mathfrak{H}_z}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_n \cdot \cos n \varphi \cdot 2 J_n \left( \frac{r}{a} j_{np} \right) \cdot \frac{J_n \left( \frac{r}{a} j_{np} \right)}{J_n'^2(j_{np})} \cdot \frac{e^{\pm i \cdot \frac{z}{a} \cdot \sqrt{a^2 k^2 - j_{np}^2}}}{\sqrt{a^2 k^2 - j_{np}^2}}.$$

Hierin ist  $\delta \mathcal{N}_z$  das durch die Gl. (1,1a) definierte, durch  $4\pi$  dividierte Moment des elektrischen Dipols, und es gilt in (1,1) das obere Vor-

$$(1,1a) \quad \delta \mathcal{N}_z = \mathfrak{S} \cdot \frac{\delta z}{4\pi}$$

zeichen für ein  $z > 0$  und das untere für ein  $z < 0$ . Die Bedeutung der übrigen Zeichen geht aus der Formelzeichenzusammenstellung der vorliegenden Arbeit hervor. Ist das Dielektrikum des inneren Hohlleiters verlustfrei, so ist  $ak = \frac{2\pi a}{\lambda}$  rein reell und die Wurzel im Exponenten von (1,1) positiv reell oder positiv imaginär, je nachdem  $ak \geq j_{n,p}$  ist. Im Falle der Gleichheit dieser beiden Größen wird außerdem  $M_\alpha$  unendlich groß. Es liegt dann für die betreffende Teilwelle des Strahlungsfeldes Resonanz vor. Die kritischen Wellenlängen der verschiedenen Resonanzzustände gehen aus Gl. (1,2) hervor. Solange  $ak > j_{n,p}$  ist, stellt offensichtlich das einzelne Teilfeld nach (1,1)

$$\lambda_{n,p}^{(m)} = \frac{2\pi a}{j_{n,p}} \cdot \left(\frac{s}{\epsilon_0}\right)^{1/2}$$

eine Welle dar, die sich vom Dipol aus sowohl in Richtung der positiven wie der negativen  $z$ -Achse ungedämpft ausbreitet. Auf den Lösungsmechanismus der gegenüber der Problemstellung bei Weyrich verallgemeinerten Aufgabe mit der Lösung (1,1) gehen wir hier nicht näher ein, da er nötigenfalls aus dessen oben zitierter Arbeit leicht ersehen werden kann.

Die Beziehungen für die verschiedenen Feldkomponenten folgen aus der Gl. (1,1) durch einfache Differentiationen nach der durch das Gleichungspaar (1,2a, b) gegebenen Anleitung. Da von dem Vektor  $\mathfrak{P}$  im (1,2a)  $\mathfrak{S} = \text{rot } \mathfrak{P}$ , (1,2b)  $g^{(c)} \cdot \mathfrak{E} = k^2 \cdot \mathfrak{P} + \text{grad div } \mathfrak{P}$  vorliegenden Falle allein die  $z$ -Komponente mit  $\mathfrak{P}_z = M_\alpha$  von Null verschieden ist, so ist in dem durch (1,1) beschriebenen Strahlungsfeld die Komponente  $\mathfrak{S}_z = 0$ . Durch einen axialen Dipol wird also gemäß (1,1) in einem zylindrischen Hohlraum eine  $\infty^2$ -fache Mannigfaltigkeit von durchweg transversal magnetischen Teilfeldern erzeugt, die sich voneinander lediglich durch die Zahl der Knotenstrahlen ( $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ ) und Knotenkreise ( $p = 1, 2, 3 \dots$ ) unterscheiden. Die Zahl der Knotendurchmesser ist dabei für alle fünf Feldkomponenten eines und desselben Teilfeldes die gleiche wie für den Hertzschen Vektor selbst, und zwar gleich der Ordnungszahl  $n$ . Nur ihre Lage ist für die verschiedenen Feldkomponenten nicht immer dieselbe. Dahingegen stimmt die Zahl der Knotenkreise nur dann mit  $p$  überein, wenn man festsetzt, daß der Randkreis  $r = a$  gleichfalls als Knotenkreis gerechnet wird, nicht aber der Kreis  $r = 0$ , und selbst das gilt außer für  $M_\alpha$  nur für die Feldgrößen  $\mathfrak{E}_\varphi$ ,  $\mathfrak{E}_z$  und  $\mathfrak{S}_\varphi$ . Es



ist üblich geworden, solche Wellen aus einem nunmehr verständlichen Grunde der Kürze halber als Wellen des Typus  $TM_{p,n}$  oder als  $TM_{p,n}$ -Wellen zu bezeichnen. Zum mindesten bei der Typusangabe selbst muß dann der Zeiger  $p$  zuerst angeführt werden, da die Reihenfolge  $p, n$  der der Koordinaten  $r, \varphi$  entsprechen muß.

Soweit scheint im wesentlichen alles geklärt und keine Veranlassung vorhanden zu sein, auf diese Dinge weiter einzugehen. Soll jedoch der Vorteil, den eine Darstellung des Dipolfeldes nach Gl. (1,1) insofern aufweist, als sie auch einen Einblick in die quantitative Zusammensetzung der Strahlung nach den räumlichen Oberfeldern gestattet, für den Entwurf geeigneter Senderformen und für die Voraussage ihres Verhaltens wirklich von Nutzen sein, so muß sie auch die Möglichkeit an die Hand geben, verwickeltere Strahlertypen endlicher Ausdehnung zu untersuchen. Der einzige Strahler, der aber mittels der Gl. (1,1) einer quantitativen Betrachtung zugänglich ist, besteht in der endlichen Stabantenne, die in Richtung der  $z$ -Achse verläuft, oder in der endlichen Rahmenantenne gleicher Richtung, während sie jeder Antennenform gegenüber versagt, die merkliche Dimensionen in einer Richtung quer zur  $z$ -Achse besitzt. Da nun jeder Sender mit endlichen Abmessungen aus einzelnen Dipolen zusammengesetzt werden kann, sobald nur eine einigermaßen zuverlässige Angabe über die Verteilung des Stroms längs des Senders nach Größe und Phase gemacht werden kann, so genügt es offenbar, diese noch fehlenden Betrachtungen gleichfalls nur an Dipolen anzustellen, und zwar an solchen, die entweder die Richtung zunehmender Werte von  $r$  oder von  $\varphi$  haben. Wir werden solche Dipole im folgenden *radiale* oder *tangentiale* Dipole nennen. Es versteht sich bei dieser Zielsetzung von selbst, daß wir beide Fälle unter der Annahme werden in Angriff nehmen müssen, daß die Dipole zugleich außerhalb der  $z$ -Achse liegen. Überdies besteht überhaupt nur unter dieser Voraussetzung ein wesentlicher Unterschied zwischen einem radialen und einem tangentialen Dipol.

Das Strahlungsfeld dieser beiden Arten von Dipolen unterscheidet sich nun in ganz charakteristischer Weise von dem Strahlungsfeld eines axialen Dipols. Es zeigt sich nämlich, daß sich in dem verwickelteren Falle eines radialen oder tangentialen Dipols das gesamte Strahlungsfeld aus zwei gesetzmäßig gekoppelten Strahlungsfeldern zusammensetzt, von denen jedes für sich betrachtet in Analogie zu Gl. (1,1) selbst wieder aus unendlich vielen Teilfeldern besteht. Der orthogonale Charakter der einzelnen räumlichen Oberfelder erstreckt sich dabei nicht nur auf die Teilwellen eines und desselben Strahlungsfeldes, sondern auch auf die Teilwellen verschiedener

Strahlungsfelder. Die Kopplung der beiden Felder bleibt auch dann noch bestehen, wenn die Dipole in die Achse des Hohlleiters hineinrücken.

Diese lediglich durch die besondere Stellung der Dipole hervorgerufene Kopplung von Feldern hat nichts zu tun mit der bekannten Widerstandskopplung von Strahlungsfeldern, wie sie z. B. bei einem horizontalen Dipol gegenüber einem leitenden Halbraum<sup>2)</sup> und auch beim axialen Dipol in einem Hohlleiter<sup>4)</sup> auftritt, wenn der ihm umgebende Raum nicht widerstandsfrei ist. In allen diesen Fällen verschwindet nämlich das eine der beiden Strahlungsfelder, sobald die Leitfähigkeit des angrenzenden Körpers über alle Grenzen wächst. Die hier untersuchte Kopplungserscheinung tritt aber selbst bei einem vollkommen leitenden Hüllkörper auf.

### 1. Das Strahlungsfeld des tangentialen elektrischen Dipols

2. Die Integraldarstellung der beiden primären Hertzischen Vektoren  $\delta E_r^{(e)}$  und  $\delta M_r^{(e)}$ . Wir legen den Betrachtungen dieses Abschnittes einen Dipol vom Moment  $\delta \mathfrak{N}_r = J \cdot \varrho \cdot \frac{\delta \varphi}{4\pi}$  zugrunde und ordnen ihn nach Art von Abb. 2 in das zylindrische Bezugssystem

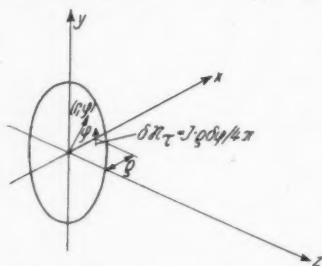


Abb. 2. Die Lage des tangentialen elektrischen Dipols zum Bezugssystem der  $(r, \varphi, z)$

der  $(r, \varphi, z)$  ein. Dann hat der Hertzische Vektor dieses Dipols, solange er frei und unbehindert nach allen Seiten strahlen kann, allein die Komponente  $\delta \mathfrak{N}_y^{(e)}$ , und für sie gilt in Rücksicht auf die Gl. (1,4) des Anhangs die Darstellung:

$$(2,1) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta \mathfrak{N}_y^{(e)} &= \delta \mathfrak{N}_r \cdot \frac{e^{ikR}}{R} = i \cdot \frac{\delta \mathfrak{N}_r}{2a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cdot \cos n \varphi \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} J_n(s_\varrho) H_n^{(1)}(s_r) \cdot e^{\frac{is_z}{a}} \cdot ds. \quad (r > \varrho) \end{aligned} \right.$$

Von der Wellenzahl  $k$  nehmen wir vorläufig an, daß sie eine nicht verschwindende, positiv imaginäre Komponente besitzt. Die in Richtung wachsender Werte von  $r$  und  $\varphi$  genommenen Komponenten von  $\mathfrak{P}$  ergeben sich aus  $\delta \mathfrak{P}_y$  nach Abb. 2 mittels der beiden Gl. (2,2a) und (2,2b). Wir gehen mit (2,1) in diese beiden Gleichungen ein

$$(2,2a) \quad \delta \mathfrak{P}_r^{(e)} = \delta \mathfrak{P}_y^{(e)} \cdot \sin \varphi, \quad (2,2b) \quad \delta \mathfrak{P}_\varphi^{(e)} = \delta \mathfrak{P}_y^{(e)} \cdot \cos \varphi$$

und ordnen in beiden Fällen die Summen derart um, daß wir wie in (2,1) wieder eine reine Fourierentwicklung erhalten. Die beiden Formeln für  $\delta \mathfrak{P}_r^{(e)}$  und  $\delta \mathfrak{P}_\varphi^{(e)}$  lauten dann wie folgt:

$$(2,3) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta \mathfrak{P}_r^{(e)} &= i \cdot \frac{\delta \mathfrak{R}_r}{4a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cdot \cos n \varphi \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \{ J_{n-1}(s_\varrho) H_{n-1}^{(1)}(s_r) - J_{n+1}(s_\varrho) H_{n+1}^{(1)}(s_r) \} \cdot e^{\frac{is_z}{a}} \cdot ds, \\ &\hspace{15em} (r > \varrho) \end{aligned} \right.$$

$$(2,4) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta \mathfrak{P}_\varphi^{(e)} &= i \cdot \frac{\delta \mathfrak{R}_r}{4a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cdot \cos n \varphi \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \{ J_{n-1}(s_\varrho) H_{n-1}^{(1)}(s_r) + J_{n+1}(s_\varrho) H_{n+1}^{(1)}(s_r) \} \cdot e^{\frac{is_z}{a}} \cdot ds. \end{aligned} \right.$$

Die sechs Komponenten des Feldes selbst ergeben sich hieraus mit Hilfe des Gleichungssystems (1,2a, b). Beziehen wir die darin vorgeschriebenen Differentialoperationen auf das im vorstehenden benutzte Zylinderkoordinatensystem, so gelangt man in ausgeschriebener Form zu den folgenden Zusammenhängen:

$$(2,5a) \quad \mathfrak{E}_r^{(e)} = - \frac{\partial \mathfrak{P}_\varphi^{(e)}}{\partial z},$$

$$(2,5b) \quad \mathfrak{E}_\varphi^{(e)} = \frac{\partial \mathfrak{P}_r^{(e)}}{\partial z},$$

$$(2,5c) \quad \mathfrak{E}_z^{(e)} = r^{-1} \cdot \frac{\partial (r \mathfrak{P}_\varphi^{(e)})}{\partial r} - r^{-1} \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}_r^{(e)}}{\partial \varphi},$$

$$(2,5\alpha) \quad g^{(e)} \cdot \mathfrak{E}_r^{(e)} = k^2 \cdot \mathfrak{P}_r^{(e)} + \frac{\partial}{\partial r} (\operatorname{div} \mathfrak{P}^{(e)}),$$

$$(2,5\beta) \quad g^{(e)} \cdot \mathfrak{E}_\varphi^{(e)} = k^2 \cdot \mathfrak{P}_\varphi^{(e)} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (\operatorname{div} \mathfrak{P}^{(e)}),$$

$$(2,5\gamma) \quad g^{(e)} \cdot \mathfrak{E}_z^{(e)} = \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{div} \mathfrak{P}^{(e)}).$$

Die Vektorkomponente  $\delta \mathfrak{P}_y^{(e)}$  von Gl. (2,1) befriedigt bekanntlich die Differentialgleichung (2,6). Von den Vektorkomponenten  $\delta \mathfrak{P}_r^{(e)}$  und  $\delta \mathfrak{P}_\varphi^{(e)}$  gilt das jedoch nicht mehr. Man erkennt dies sofort an

$$(2,6) \quad \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right\} \delta \mathfrak{P}_y^{(e)} = 0.$$

dem verschiedenen Aufbau der Integranden der drei in Frage kommenden Integrale. Dieselbe Behauptung gilt von den Komponenten von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  nach  $r$  und  $\varphi$ . Dagegen müssen die beiden Feldkomponenten  $\mathfrak{E}_z$  und  $\mathfrak{H}_z$  wie  $\mathfrak{P}_y$  selbst wieder der Differentialgleichung (2,6) genügen. Es steht daher zu erwarten, daß die Darstellung von  $\mathfrak{E}_z$  und  $\mathfrak{H}_z$  durch Summe und Integral im wesentlichen gleichfalls die Gestalt der Gl. (2,1) hat. Das läßt sich leicht bestätigen, indem man mit den Gl. (2,3) und (2,4) in die Gl. (2,5c) und (2,5γ) eingeht. Da für die folgenden Rechnungen diese beiden Darstellungen von  $\mathfrak{E}_z$  und  $\mathfrak{H}_z$  in ihrem Aufbau bekannt sein müssen, so führen wir sie explizite an. Sie lauten:

$$(2,7a) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{H}_z^{(e)} &= \frac{\delta \mathfrak{M}_z}{2a^4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cdot \cos n\varphi \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{s^2 - a^2 k^2} \cdot J'_n(s_\varrho) H_n^{(1)}(s_r) \cdot e^{\frac{isz}{a}} \cdot ds, \end{aligned} \right. \quad (r > \varrho)$$

$$(2,7b) \quad \left\{ \begin{aligned} g^{(e)} \cdot \mathfrak{E}_z^{(e)} &= \frac{\delta \mathfrak{M}_z}{2a^3 \varrho} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cdot n \cdot \sin n\varphi \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} s \cdot J_n(s_\varrho) H_n^{(1)}(s_r) \cdot e^{\frac{isz}{a}} \cdot ds. \end{aligned} \right.$$

In der Tat treten in diesen beiden Gleichungen wie in Gl. (2,1) die von  $r$ ,  $\varphi$  und  $z$  abhängenden Faktoren gerade in der Form und Verbindung auf, in der sie eine Produktlösung der Differentialgleichung (2,6) bilden.

Um nun die Randbedingungen der Aufgabe durch eine geeignete Zusatzlösung erfüllen zu können, ist es keineswegs zu empfehlen, die bisherige Darstellung des totalen und damit auch des primären Feldes durch die beiden Vektorkomponenten  $\mathfrak{P}_r$  und  $\mathfrak{P}_\varphi$  beizubehalten. Zwar wäre es grundsätzlich durchaus möglich, auch für  $\mathfrak{P}_r$  und  $\mathfrak{P}_\varphi$  geeignete Zusatzlösungen zu finden. Die Rechnungen würden jedoch sehr umständlich und vor allem physikalisch sehr undurchsichtig werden. Wir wollen daher einen anderen Weg beschreiten, indem wir dabei von der Tatsache ausgehen, daß bei Verwendung von

Zylinderkoordinaten jedes beliebige elektromagnetische Feld stets aus zwei Teilfeldern zusammengesetzt werden kann, von denen das eine ein transversal magnetisches, das andere ein transversal elektrisches Feld darstellt. Nach den Ausführungen in der Einleitung entsteht aus den Gl. (1,2a, b) immer dann ein transversal magnetisches Feld, wenn darin der Hertzsche Vektor  $\mathfrak{P}$  als einzige nicht verschwindende Komponente die Komponente  $\mathfrak{P}_z \equiv M$  besitzt. Auf Grund der bekannten Dualität zwischen den Gl. (1,2a, b) und (2,8a, b) gelangt man daher zu einem transversal elektrischen Feld, wenn in

$$(2,8a) \quad \mathfrak{E} = \text{rot } \mathfrak{Q} \quad (2,8b) \quad g^{(m)} \cdot \mathfrak{H} = k^2 \cdot \mathfrak{Q} + \text{grad div } \mathfrak{Q}$$

dem letzten Gleichungspaar der Vektor  $\mathfrak{Q}$  nur die  $z$ -Komponente  $\mathfrak{Q}_z \equiv E$  hat. In ausgeschriebener Form haben wir demgemäß zwischen den Komponenten der beiden Teilfelder  $\mathfrak{E}^{(1)}$ ,  $\mathfrak{H}^{(1)}$  und  $\mathfrak{E}^{(2)}$ ,  $\mathfrak{H}^{(2)}$  und den zu ihnen gehörigen Vektorkomponenten  $E$  und  $M$  die folgenden Zusammenhänge:

Es ist für das transversal *elektrische* Feld:

$$\begin{aligned} (2,9a) \quad \mathfrak{E}_r^{(1)} &= r^{-1} \cdot \frac{\partial E}{\partial \varphi}, & (2,9\alpha) \quad g^{(m)} \cdot \mathfrak{H}_r^{(1)} &= \frac{\partial^2 E}{\partial r \cdot \partial z}, \\ (2,9b) \quad \mathfrak{E}_\varphi^{(1)} &= -\frac{\partial E}{\partial r}, & (2,9\beta) \quad g^{(m)} \cdot \mathfrak{H}_\varphi^{(1)} &= r^{-1} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial \varphi \partial z}, \\ (2,9c) \quad \mathfrak{E}_z^{(1)} &= 0, & (2,9\gamma) \quad g^{(m)} \cdot \mathfrak{H}_z^{(1)} &= k^2 E + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \end{aligned}$$

und für das transversal *magnetische* Feld:

$$\begin{aligned} (2,10a) \quad g^{(e)} \cdot \mathfrak{E}_r^{(2)} &= \frac{\partial^2 M}{\partial r \partial z}, & (2,10\alpha) \quad \mathfrak{H}_r^{(2)} &= r^{-1} \cdot \frac{\partial M}{\partial \varphi}, \\ (2,10b) \quad g^{(e)} \cdot \mathfrak{E}_\varphi^{(2)} &= r^{-1} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi \partial z}, & (2,10\beta) \quad \mathfrak{H}_\varphi^{(2)} &= -\frac{\partial M}{\partial r}, \\ (2,10c) \quad g^{(e)} \cdot \mathfrak{E}_z^{(2)} &= k^2 M + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2}, & (2,10\gamma) \quad \mathfrak{H}_z^{(2)} &= 0. \end{aligned}$$

Gehen wir daher mit der Absicht um, auch das vorgelegte Feld gemäß dem Schema der Gl. (2,9) und (2,10) durch die Vektorkomponenten  $E$  und  $M$  darzustellen, anstatt wie bisher durch die Komponenten  $\mathfrak{P}_r$  und  $\mathfrak{P}_\varphi$ , so haben wir uns lediglich zu überlegen, auf welche Weise die Berechnung der beiden Hilfsgrößen  $E$  und  $M$  wirklich durchgeführt werden kann. Da diese Größen die  $z$ -Komponenten eines Hertzschen Vektors sind, so muß jede von ihnen der Differentialgleichung (2,6) genügen. Ihr Aufbau in Form einer Summe und eines Integrals verlangt also dieselbe Zusammensetzung in bezug auf die von  $r$ ,  $\varphi$  und  $z$  abhängenden Faktoren, wie sie die Gl. (2,1) und (2,7a, b) aufweisen. Im übrigen muß aber wegen  $\mathfrak{E}_z^{(1)} = 0$  und  $\mathfrak{H}_z^{(2)} = 0$  sowohl  $\mathfrak{E}_z^{(2,e)} = \mathfrak{E}_z^{(e)}$  als auch  $\mathfrak{H}_z^{(1,e)} = \mathfrak{H}_z^{(e)}$  sein.

Diese Gleichheit führt zu den folgenden beiden Angaben über  $\delta E_r^{(e)}$  und  $\delta M_r^{(e)}$ :

$$(2,11) \left\{ \begin{aligned} \delta E_r^{(e)}(r, \varphi, z) &= -\frac{1}{2} \cdot g^{(m)} \cdot \delta \mathfrak{M}_r \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cdot \cos n \varphi \\ &\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} J'_n(s_e) H_n^{(1)}(s_r) \cdot \frac{e^{\frac{isz}{a}}}{\sqrt{s^2 - a^2 k^2}} \cdot ds, \end{aligned} \right. \quad (r > \varrho)$$

$$(2,12) \left\{ \begin{aligned} \delta M_r^{(e)}(r, \varphi, z) &= -\frac{\delta \mathfrak{M}_r}{2\varrho} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cdot n \cdot \sin n \varphi \\ &\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s}{s^2 - a^2 k^2} \cdot J(s_e) H_n^{(1)}(s_r) \cdot e^{\frac{isz}{a}} \cdot ds. \end{aligned} \right.$$

Ist in diesen Gleichungen  $r < \varrho$ , so braucht man nur unter dem Integralzeichen  $s_e$  mit  $s_r$  zu vertauschen. Die Richtigkeit der beiden Gl. (2,11) und (2,12) läßt sich im übrigen mehrfach dadurch bestätigen, daß man jede der Feldkomponenten des primären Feldes einmal unmittelbar aus den Gl. (2,5) bestimmt, das andere Mal aber über die Gl. (2,9) und (2,10) als Summe von  $\mathfrak{E}^{(1)}$  und  $\mathfrak{E}^{(2)}$  oder  $\mathfrak{H}^{(1)}$  und  $\mathfrak{H}^{(2)}$ . Diese Kontrollrechnungen müssen jedoch dem Leser überlassen bleiben.

In den Gl. (2,11) und (2,12) ist es damit gelungen, das bekannte einfache Strahlungsfeld eines einzelnen Dipols in ein  $2 \cdot \infty^1$  faches System von Teilfeldern aufzuspalten, die in bezug auf das benutzte Zylinder-Koordinatensystem transversal elektrischer oder magnetischer Natur sind. Es versteht sich von selbst, daß diese Maßnahme, die an sich gewiß keine Vereinfachung bedeutet, nur sinnvoll ist im Hinblick auf die weiteren Absichten. Daß diese Aufspaltung schon beim primären Feld auf beide Arten transversaler Felder geführt hat, ist zugleich der eigentliche Grund dafür, daß wir auch später beim Hohlleiterfeld auf zwei gekoppelte Felder stoßen.

3. Die vollständigen Lösungen von  $\delta E_r$  und  $\delta M_r$ . Hatten wir es bisher ausschließlich mit dem Dipol im freien Raum zu tun, so denken wir uns nunmehr den Dipol von der vollkommen leitenden zylindrischen Fläche  $r = a$  umschlossen. Es obliegt uns dann die Aufgabe, das Gesetz der durch die Gl. (2,11) und (2,12) beschriebenen, ungehinderten Wellenausbreitung so umzugestalten, daß es dabei gleichzeitig den besonderen Bedingungen an der Oberfläche der Hülle Genüge leistet. Wegen der vorausgesetzten idealen Leit-

fähigkeit wirkt nun die Hülle wie ein vollkommener Spiegel, und in derselben Weise wirkt auch die Achse der Hüllfläche selbst. Die Lösung, die wir anstreben, wollen wir jedoch nicht in der Form zu gewinnen trachten, die in physikalisch interpretierbarer Weise eine getreue Wiedergabe aller dieser unzähligen Reflexionen zwischen Hülle und Achse darstellt, wie das in einer früheren Arbeit<sup>5)</sup> geschehen ist. Wir suchen vielmehr von vornherein nach einer solchen Lösung, die lediglich das Ergebnis der Überlagerung aller dieser Wellenzüge beschreibt, und machen dabei die auf ihre Richtigkeit erst hinterher an der Erfüllung aller Forderungen beweisbare Annahme, daß auch dieses reflektierte Wellenfeld aus zwei Vektorkomponenten nach Art von  $\partial E_r^{(e)}$  und  $\partial M_r^{(e)}$  hergeleitet werden kann. Dann leuchtet aber aus physikalischen Gründen ein, daß der Ansatz, der beim reflektierten Feld für diese beiden Größen in Rücksicht auf die Gl. (2,6) gemacht werden kann, nicht zu unterscheiden braucht zwischen den Bereichen  $r < \varrho$  und  $r > \varrho$ , und daß er sich für  $r = 0$  obendrein regulär verhalten muß. Die für die Zusatzvektoren  $\Delta E_r$  und  $\Delta M_r$  anzusetzenden Ausdrücke haben also in dem ganzen Bereich  $0 \leq r \leq a$  Geltung, und sie werden denselben Aufbau erhalten können wie die Gl. (2,11) und (2,12) mit dem einzigen Unterschied, daß an Stelle von  $H_n^{(1)}(s_r)$  der Faktor  $A_n(s)$  oder  $B_n(s) \cdot J_n(s_r)$  tritt mit  $A_n(s)$  und  $B_n(s)$  als zwei vorläufig unbekannten Funktionen von  $s$ . Mit Ausnahme dieser beiden Faktoren gleicht dann der Aufbau der Zusatzvektoren  $\Delta E_r$  und  $\Delta M_r$  dem der obigen beiden primären Vektoren im Bereich  $r < \varrho$ .

Die in unserem Ansatz auftretenden unbekannten Koeffizienten  $A_n(s)$  und  $B_n(s)$  ergeben sich ohne Schwierigkeit aus den Randbedingungen der Aufgabe. Diese verlangen bekanntlich das Verschwinden der Tangentialkomponenten des gesamten elektrischen Feldes an der Hülle, und diese Forderung ist gewiß auch dann erfüllt, wenn darüber hinaus auch schon die Tangentialkomponenten der beiden Teilfelder  $\mathcal{E}^{(1)}$ ,  $\mathcal{H}^{(1)}$  und  $\mathcal{E}^{(2)}$ ,  $\mathcal{H}^{(2)}$  für  $r = a$  verschwinden. Aus den Gl. (2,9) und (2,10) ist nun sofort zu ersehen, daß das Verschwinden von  $\mathcal{E}_\varphi$  und  $\mathcal{E}_z$  an der Hüllfläche tatsächlich für alle möglichen Werte von  $\varphi$  und  $z$  erreicht werden kann, wenn für  $r = a$  die beiden Gl. (3,1) und (3,2) erfüllt sind. Diese beiden Bedingungen führen aber für die unbekannten Koeffizienten  $A_n(s)$  und  $B_n(s)$  zu

$$(3,1) \quad \left\{ \frac{\partial E_r(r, \varphi, z)}{\partial r} \right\}_{r=a} = \left\{ \frac{\partial E_r^{(e)}(r, \varphi, z)}{\partial r} \right\}_{r=a} + \left\{ \frac{\partial \Delta E_r(r, \varphi, z)}{\partial r} \right\}_{r=a} = 0,$$

$$(3,2) \quad M_r(a, \varphi, z) = M_r^{(e)}(a, \varphi, z) + \Delta M_r(a, \varphi, z) = 0$$



zwei sehr einfachen linearen Bestimmungsgleichungen. Benutzen wir dann noch, um zu einer übersichtlicheren Schreibweise zu gelangen, die beiden vorübergehenden Abkürzungen (3,3) und (3,4), so

$$(3,3) \quad \left\{ \begin{aligned} F_r^{(e)} \left( n; \frac{\varrho}{a}, \frac{r}{a}; \sqrt{s^2 - a^2 k^2} \right) &= (s^2 - a^2 k^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{J_n(s_\varrho)}{J_n(s_a)} \\ &\cdot \{ H_n^{(1)}(s_r) J_n'(s_a) - H_n^{(1)'}(s_a) J_n(s_r) \}, \end{aligned} \right. \quad (r > \varrho)$$

$$(3,4) \quad \left\{ \begin{aligned} F_r^{(m)} \left( n; \frac{\varrho}{a}, \frac{r}{a}; \sqrt{s^2 - a^2 k^2} \right) &= s \cdot (s^2 - a^2 k^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{J_n(s_\varrho)}{J_n(s_a)} \\ &\cdot \{ H_n^{(1)}(s_r) J_n(s_a) - H_n^{(1)}(s_a) J_n(s_r) \} \end{aligned} \right.$$

entstehen für die beiden Vektorkomponenten  $\delta E_r$  und  $\delta M_r$  des gesamten Strahlungsfeldes im Bereich  $r > \varrho$  des Hohlleiters die Darstellungen:

$$(3,5) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta E_r(r, \varphi, z) &= -\frac{g^{(m)}}{2} \cdot \delta \mathfrak{N}_r \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cdot \cos n \varphi \\ &\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F_r^{(e)} \left( n; \frac{\varrho}{a}, \frac{r}{a}; \sqrt{s^2 - a^2 k^2} \right) \cdot e^{\frac{isz}{a}} \cdot ds, \end{aligned} \right.$$

$$(3,6) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta M_r(r, \varphi, z) &= -\frac{\delta \mathfrak{N}_r}{2 \varrho} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cdot n \cdot \sin n \varphi \\ &\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F_r^{(m)} \left( n; \frac{\varrho}{a}, \frac{r}{a}; \sqrt{s^2 - a^2 k^2} \right) \cdot e^{\frac{isz}{a}} \cdot ds. \end{aligned} \right.$$

Um zu den im Bereich  $r < \varrho$  geltenden Beziehungen zu gelangen, sind nur in den Definitionsgleichungen (3,3) und (3,4)  $s_r$  mit  $s_\varrho$  zu vertauschen.

4. Die doppelt unendliche Reihe der Eigenfunktionen für  $\delta E_r$  und  $\delta M_r$ . Um nun für  $\delta E_r$  und  $\delta M_r$  zu der endgültigen Darstellung zu gelangen, ist nur noch erforderlich, die in den Gl. (3,5) und (3,6) auftretenden Integrale auszuwerten. Wir tun dies am einfachsten mit Hilfe des Residuensatzes von Cauchy. Nach dem Abschn. 2 des Anhanges sind die beiden Funktionen  $F_r^{(e)}$  und  $F_r^{(m)}$  der Gl. (3,3) und (3,4) eindeutige und meromorphe Funktionen der  $s$ -Ebene. Sie besitzen beide gemeinsam die einfachen Pole  $s = \pm ak$ . Außerdem hat  $F_r^{(e)}$  noch eine unendliche Kette einfacher Pole in den Punkten  $s = \pm s_p' = \pm (a^2 k^2 - j_{n,p}^{'2})^{1/2}$  und  $F_r^{(m)}$  eine unendliche

Kette solcher Pole in den Punkten  $s = \pm s_p = \pm (a^2 k^2 - j_{np}^2)^{1/2}$ . Die Residuen in allen diesen Polen, die für ein  $\Im(k) > 0$  durchweg entweder oberhalb oder unterhalb der reellen Achse der  $s$ -Ebene liegen, sind nach den Gl. (2,4), (2,5) und (2,10), (2,11) des Anhangs als bekannt anzusehen. Wir haben dann den zunächst noch offenen Integrationsweg in den Integralen in (3,5) und (3,6) für ein  $z > 0$  durch den oberen und für ein  $z < 0$  durch den unteren Halbkreis der  $s$ -Ebene zu einem geschlossenen Weg zu ergänzen. Lassen wir den Radius dieser Halbkreise größer und größer werden, wobei nur vermieden werden muß, daß sie gerade durch einen der sich bis ins Unendliche erstreckenden Pole der Kette hindurchgehen, so kann durch diese Maßnahme für alle  $|z| > 0$  und für alle  $r \geq \varrho$  und  $r < a$  der Beitrag der Integrale längs dieser Halbkreise in Rücksicht auf das im Anhang angegebene asymptotische Verhalten von  $F_r^{(e)}$  und  $F_r^{(m)}$  unabhängig von  $n$  unter jede beliebig kleine Grenze herabgedrückt werden. Die Integrale in (3,5) und (3,6) sind dann in der Grenze gleich dem  $\pm 2\pi i$  fachen der Summe der Residuen aller Pole in der oberen oder unteren  $s$ -Halbebene.

Wir bestimmen auf diese Weise zunächst die Beiträge der beiden Pole  $s = \pm ak$  zu den Entwicklungen für  $\delta E_r$  und  $\delta M_r$ . Für sie ergibt sich

$$(4,1) \quad \left\{ \begin{aligned} (\delta E_r)_{s=\pm ak} &= i \cdot g^{(m)} \frac{\delta \mathfrak{H}_r}{2\varrho k} \cdot e^{\pm i k z} \\ &\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cdot \cos n \varphi \cdot \left[ \left( \frac{\varrho}{r} \right)^n + \left( \frac{r\varrho}{a^2} \right)^n \right], \end{aligned} \right.$$

$$(4,2) \quad \left\{ \begin{aligned} (\delta M_r)_{s=\pm ak} &= \mp \frac{\delta \mathfrak{H}_r}{2\varrho} \cdot e^{\pm i k z} \\ &\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \cdot \sin n \varphi \cdot \left[ \left( \frac{\varrho}{r} \right)^n - \left( \frac{r\varrho}{a^2} \right)^n \right] \end{aligned} \right.$$

und es gilt hierin das obere Vorzeichen für  $z > 0$  und das untere für  $z < 0$ . Diese Vorzeichenunterscheidung erklärt sich mathematisch aus der Notwendigkeit, in Rücksicht auf den Faktor  $\exp\left(\frac{isz}{a}\right)$  in den Integranden von (3,5) und (3,6) für ein  $z > 0$  längs des oberen Halbkreises und für ein  $z < 0$  längs des unteren Halbkreises zu integrieren. Aber auch physikalisch ist diese Vorzeichenunterscheidung notwendig, denn erst der Vorzeichenwechsel hat zur Folge, daß der Erwartung gemäß durch die Gl. (4,1), (4,2) ein Vorgang beschrieben wird, der aus zwei sich vom Dipol aus in entgegen-

gesetzten Richtungen ausbreitenden Wellen besteht. Berechnet man nun mit Hilfe von (4,1) und (4,2) über die Gl. (2,9 $\gamma$ ) und (2,10c) die Komponenten  $\mathfrak{E}_z$  und  $\mathfrak{H}_z$  der beiden Teilfelder, so zeigt sich, daß sie im vorliegenden Falle identisch verschwinden. Für die übrigen vier Feldkomponenten trifft das zwar nicht für jedes Teilfeld allein zu, wohl aber verschwinden auch diese vier Komponenten, wenn man sie für das gesamte Feld als der Summe der beiden Teilfelder  $\mathfrak{E}^{(1)}$ ,  $\mathfrak{H}^{(1)}$  und  $\mathfrak{E}^{(2)}$ ,  $\mathfrak{H}^{(2)}$  berechnet. Den Nachweis hierfür mag im einzelnen der Leser selbst erbringen. Da demnach die Beiträge der Pole  $s = \pm ak$  zu  $\delta E_r$  und  $\delta M_r$  für das physikalisch wirklich existierende Feld ohne Bedeutung sind, so wollen wir übereinkommen, sie weiterhin ganz außer Betracht zu lassen.

In Rücksicht auf diese Übereinkunft ergeben sich dann aus den Gl. (3,5) und (3,6) nach bekannten Regeln für die  $z$ -Komponenten  $\delta E_r$  und  $\delta M_r$  der beiden Hertzschen Vektoren, die das transversale elektrische und magnetische Feld eines tangentialen Dipols beschreiben, die folgenden beiden Darstellungen in Form einer doppelt unendlichen Reihe von Eigenfunktionen:

$$(4,3) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta E_r(r, \varphi, z) = & -i \cdot g^{(m)} \cdot \delta \mathfrak{H}_r \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_n \cdot \frac{j'_{np} \cdot \cos n \varphi}{j'^2_{np} - n^2} \\ & \cdot 2 J'_n \left( \frac{\varrho}{a} j'_{np} \right) \cdot \frac{J_n \left( \frac{r}{a} j'_{np} \right)}{J_n^2(j'_{np})} \cdot \frac{e^{\pm i \cdot \frac{z}{a} \cdot \sqrt{a^2 k^2 - j'^2_{np}}}}{\sqrt{a^2 k^2 - j'^2_{np}}}, \end{aligned} \right.$$

$$(4,4) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta M_r(r, \varphi, z) = & \pm \frac{\delta \mathfrak{H}_r}{a} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_n \cdot \frac{\sin n \varphi}{j_{np}} \cdot \frac{2n}{j_{np} \cdot \frac{\varrho}{a}} \\ & \cdot J_n \left( \frac{\varrho}{a} j_{np} \right) \cdot \frac{J_n \left( \frac{r}{a} j_{np} \right)}{J_n^2(j_{np})} \cdot \frac{e^{\pm i \cdot \frac{z}{a} \cdot \sqrt{a^2 k^2 - j_n^2}}}{J_n^2(j_{np})}. \end{aligned} \right.$$

Auch in diesen Gleichungen gilt das obere Vorzeichen für  $z > 0$  und das untere Vorzeichen für  $z < 0$ . Im übrigen sind sie richtig für jeden Wert von  $r$  im Bereich  $0 \leq r \leq a$ . Die frühere Unterscheidung der Fälle  $r > \varrho$  und  $r < \varrho$  kommt in den vorstehenden beiden Gleichungen in Fortfall.

Das gleichzeitige Erscheinen beider Vektorkomponenten  $\delta E_r$  und  $\delta M_r$  im Endergebnis unserer bisherigen Untersuchungen bestätigt die eingangs aufgestellte Behauptung, daß durch einen tangentialen Dipol im Gegensatz zum axialen zwei miteinander gekoppelte Strahlungsfelder erzeugt werden, die damit im ganzen eine  $2 \cdot \infty^2$ -fache Mannigfaltigkeit von Teilfeldern bilden. Das von

der Vektorkomponente  $\delta E_r$  der Gl. (4,3) beschriebene Feld ist allen seinen Einzelfeldern ein transversal elektrisches Feld. Seinem Teilfeld von der Ordnung  $p, n$  kommt die Typenbezeichnung  $TE_{p,n}$  zu. Darin gibt der zweite Zeiger  $n$  wieder die Zahl der Knotendurchmesser an, die für alle fünf Feldkomponenten dieselbe ist. Die Zahl der Knotenkreise ist aber für diesen Typus außer für  $\delta E_r$  selbst auch für die Feldkomponenten  $\mathfrak{E}_r$ ,  $\mathfrak{E}_\varphi$  und  $\mathfrak{E}_z$  nur dann wieder gleich  $p$ , wenn man im Gegensatz zu den  $TM_{p,n}$ -Wellen das eventuelle Verschwinden dieser Größen in der Achse als Knotenkreis mitrechnet. Das von der Vektorkomponente  $\delta M_r$  dargestellte Feld ist in allen seinen Teilfeldern ein transversal magnetisches Feld. Es kommt ihnen daher, wie schon eingangs erwähnt, die Typenbezeichnung  $TM_{p,n}$  zu. Über die Bedeutung, die die Zeiger  $n$  und  $p$  für die Zahl der Knotenstrahlen und Knotenkreise bei diesen Wellen haben, ist schon in der Einleitung alles Erforderliche gesagt worden.

Die kritischen Wellenlängen beider Strahlungsfelder, die mit  $\lambda_{pn}^{(e)}$  und  $\lambda_{pn}^{(m)}$  bezeichnet werden sollen, denken wir uns auch im Falle eines komplexen Wertes von  $k$  stets durch das Verschwinden des Realteils der beiden Radikanden  $(a^2 k^2 - j_{np}^2)$  und  $(a^2 k^2 - j_{np}'^2)$  gegeben. Es ist daher bei der

$$\text{transversal elektrischen Welle} \quad \lambda_{pn}^{(e)} = \frac{2\pi a}{j_{np}'} \cdot \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{1/2} \text{ cm,}$$

$$\text{transversal magnetischen Welle} \quad \lambda_{pn}^{(m)} = \frac{2\pi a}{j_{np}} \cdot \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{1/2} \text{ cm}$$

und da mit Ausnahme von  $n = 0$  für dieselben Werte von  $n$  und  $p$  stets  $j_{np}' < j_{np}$  ist, so ist auch stets  $\lambda_{pn}^{(e)} > \lambda_{pn}^{(m)}$  und nur für die axialsymmetrischen Wellen ist umgekehrt  $\lambda_{p0}^{(e)} < \lambda_{p0}^{(m)}$ .

Ist die Wellenzahl  $k$  rein reell und die Wellenlänge  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  der freien Dipolschwingung im Vakuum eine fest gegebene Größe, so kommt eine Ausbreitung des Dipolfeldes in Form ungedämpft fortschreitender Wellen nur für alle diejenigen Teilfelder der Ordnung  $p, n$  zustande, für die

$$\begin{aligned} \text{bei einer } TE\text{-Welle} \quad & \left\{ \begin{aligned} j_{np}' &< \frac{2\pi a}{\lambda} \cdot \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{1/2} = \frac{\pi a}{15} \cdot f \cdot 10^{-9} \\ &\cdot \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{1/2} \quad (n = 0, 1, 2 \dots), \end{aligned} \right. \\ \text{bei einer } TM\text{-Welle} \quad & \left\{ \begin{aligned} j_{np} &< \frac{2\pi a}{\lambda} \cdot \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{1/2} = \frac{\pi a}{15} \cdot f \cdot 10^{-9} \\ &\cdot \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{1/2} \quad (n = 1, 2, 3 \dots). \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Um diese Forderungen in ihrer zahlenmäßigen Bedeutung zu erkennen, sind für  $n = 0, 1, 2$  und  $3$  in den nachstehenden beiden Tabellen jedes Mal die vier ersten Wurzeln der beiden Gleichungen  $J_n(x) = 0$  und  $J_n'(x) = 0$  zusammengestellt worden. Bei einem tangentialen Dipol als Erreger des Strahlungsfeldes tritt demnach das Kuriosum auf, daß sich mit zunehmender Schwingungszahl bei der Wellenlänge  $\lambda_{11}^{(e)} = 3,413 \cdot a \cdot \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{1/2}$  cm die Welle  $TE_{11}$  ablöst, dann folgt bei der Wellenlänge  $\lambda_{12}^{(e)} = 2,057 \cdot a \cdot \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{1/2}$  cm die Welle  $TE_{12}$  und erst bei der Wellenlänge  $\lambda_{10}^{(e)} = \lambda_{11}^{(m)} = 1,640 \cdot a \cdot \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{1/2}$  cm wird neben der Welle  $TE_{10}$  auch zum erstenmal eine transversal magnetische Welle existenzfähig, und zwar die Welle  $TM_{11}$ .

Die ersten vier Wurzeln von  $J_n(x) = 0$  für  $n = 0, 1, 2$  und  $3$ 

	$p =$			
	1	2	3	4
$j_{0p}$	2,40483	5,52008	8,65373	11,79153
$j_{1p}$	3,83171	7,01559	10,17347	13,32369
$j_{2p}$	5,13562	8,41724	11,61984	14,79595
$j_{3p}$	6,38016	9,76102	13,01520	16,22346

Die ersten vier Wurzeln von  $J_n'(x) = 0$  für  $n = 0, 1, 2$  und  $3$ 

	$p =$			
	1	2	3	4
$j'_{0p}$	3,83171	7,01559	10,17347	13,32369
$j'_{1p}$	1,84118	5,33144	8,53632	11,70601
$j'_{2p}$	3,05424	6,70613	9,96947	13,17037
$j'_{3p}$	4,2003	8,0153	11,3458	14,5860

Die Verschiedenheit der kritischen Wellenlängen für die  $TE$ - und  $TM$ -Wellen hat zur Folge, daß auch die Geschwindigkeiten, mit denen sich die Phasen der Wellen in diesen beiden Teilfeldern ausbreiten, verschiedene Größen haben. Sie beträgt im Falle eines reellwertigen  $k$  für die transversal elektrische Welle

$$(4,5) \quad v_E^{(p,n)} = c \cdot \left\{ 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{pn}^{(e)}} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} > c,$$

transversal magnetische Welle

$$(4,6) \quad v_M^{(p,n)} = c_\epsilon \cdot \left\{ 1 - \left( \frac{\lambda}{c_{p,n}} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} > c_\epsilon.$$

Schließlich merken wir noch als wichtigsten Unterschied im Aufbau des Amplitudenspektrums der beiden Teilfelder an, daß beim Durchgang der Wellenlänge durch die kritische Frequenz die betreffende transversal elektrische Welle eine sehr große Amplitude annimmt, während bei der transversal magnetischen Welle die Amplitude in jedem Falle endlich bleibt und für einzelne Feldkomponenten sogar verschwindet. In dieser Hinsicht verhält sich auch die *TM*-Welle des tangentialen Dipoles durchaus verschieden von der eines axialen Dipols, wie aus der Gegenüberstellung der Gl. (1,1) und (4,4) ohne weiteres hervorgeht.

Auf die Bedeutung des Vorzeichenwechsels für das Auftreten flächenhafter Ströme und Ladungen in der Querschnittsebene des Dipols werden wir im Abschn. IV dieser Arbeit noch ausführlicher eingehen.

## II. Das Strahlungsfeld des radialen elektrischen Dipols

5. Die Integraldarstellung der beiden primären Hertzschen Vektoren  $\delta E_g^{(e)}$  und  $\delta M_g^{(e)}$ . Da die Berechnung des Strahlungsfeldes

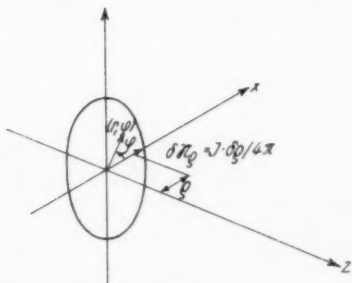


Abb. 3. Die Lage des radialen elektrischen Dipols zum Bezugssystem der  $(r, q, z)$

für den tangential und radial gestellten Dipol viele gemeinsame Züge aufweist, so werden wir uns bei der Herleitung der Lösung für den radialen Dipol, die uns im vorliegenden Abschnitt beschäftigen wird, wesentlich kürzer fassen können. Wo es nötig sein sollte, kann über die Bedeutung der einzelnen Lösungsschritte an den entsprechenden Stellen des vorigen Abschnitts nachgelesen werden.

Hat der radiale Dipol die in Abb. 3 angegebene Lage, so läßt sich das durch keine Hüllfläche in seiner Ausbreitung behinderte

Strahlungsfeld dieses Dipols zunächst einmal jedenfalls gemäß Gl. (5,1) durch die  $x$ -Komponente eines Hertzschen Vektors beschreiben. Um diese einfachste Darstellungsmöglichkeit in die für unsere Aufgabe

$$(5,1) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta \mathfrak{P}_x^{(e)} &= \delta \mathfrak{H}_e \cdot \frac{e^{ikR}}{R} = i \cdot \frac{\delta \mathfrak{H}_e}{2a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cdot \cos n\varphi \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} J_n(s_e) H_n^{(1)}(s_r) \cdot e^{\frac{isz}{a}} \cdot ds \quad (r > \varrho) \end{aligned} \right.$$

zweckmäßiger umzugestalten, bei der auch schon das primäre Feld in ein transversal elektrisches und ein transversal magnetisches zerlegt erscheint, gehen wir wieder zu den Komponenten

$$\delta \mathfrak{P}_r^{(e)} = \delta \mathfrak{P}_x^{(e)} \cdot \cos \varphi \quad \text{und} \quad \delta \mathfrak{P}_\varphi^{(e)} = -\delta \mathfrak{P}_x^{(e)} \cdot \sin \varphi$$

über und bringen unter Benutzung von (5,1) die für  $\delta \mathfrak{P}_r^{(e)}$  und  $\delta \mathfrak{P}_\varphi^{(e)}$  geltenden Ausdrücke auf die Form:

$$(5,2a) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta \mathfrak{P}_r^{(e)} &= i \cdot \frac{\delta \mathfrak{H}_e}{4a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cdot \cos n\varphi \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \{J_{n-1}(s_e) H_{n-1}^{(1)}(s_r) + J_{n+1}(s_e) H_{n+1}^{(1)}(s_r)\} \cdot e^{\frac{isz}{a}} \cdot ds, \end{aligned} \right. \quad (r > \varrho)$$

$$(5,2b) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta \mathfrak{P}_\varphi^{(e)} &= i \cdot \frac{\delta \mathfrak{H}_e}{4a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cdot \sin n\varphi \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \{J_{n+1}(s_e) H_{n+1}^{(1)}(s_r) - J_{n-1}(s_e) H_{n-1}^{(1)}(s_r)\} \cdot e^{\frac{isz}{a}} \cdot ds. \end{aligned} \right.$$

Die Berechnung der sechs Feldkomponenten kann hiermit wieder durch die Gl. (2,5) erfolgen. Sie liefert im besonderen für die beiden Komponenten  $\mathfrak{E}_z^{(e)}$  und  $\mathfrak{H}_z^{(e)}$  die Gl. (5,3), die wie alle bisherigen Gleichungen dieses Abschnittes nur für  $r > \varrho$  gelten.

$$(5,3a) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{H}_z^{(e)}(r, \varphi, z) &= i \cdot \frac{\delta \mathfrak{H}_e}{2a\varrho} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \cdot n \cdot \sin n\varphi \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} J_n(s_e) H_n^{(1)}(s_r) \cdot e^{\frac{isz}{a}} \cdot ds, \end{aligned} \right.$$

$$(5,3b) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_z^{(e)}(r, \varphi, z) &= \frac{i}{g^{(e)}} \cdot \frac{\delta \mathfrak{H}_e}{2a^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cdot \cos n\varphi \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} s \cdot \sqrt{s^2 - a^2 k^2} \cdot J_n(s_e) H_n^{(1)}(s_r) \cdot e^{\frac{isz}{a}} \cdot ds. \end{aligned} \right.$$



Versucht man nun im Sinne des von uns geplanten Vorgehens die Größen  $\mathfrak{E}_z^{(e)}$  und  $\mathfrak{H}_z^{(e)}$  der letzten beiden Gleichungen durch die  $z$ -Komponenten  $\delta E_\varrho^{(e)}$  und  $\delta M_\varrho^{(e)}$  zweier Hilfsvektoren darzustellen, deren übrige Komponenten identisch verschwinden, so erhält man dafür als Gegenstück zu den Gl. (2,11) und (2,12) die Beziehungen:

$$(5,4) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta E_\varrho^{(e)}(r, \varphi, z) &= -\frac{g^{(m)}}{2} \cdot \delta \mathfrak{H}_\varrho \cdot i \frac{a}{\varrho} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \cdot n \cdot \sin n \varphi \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} J_n(s_\varrho) H_n^{(1)}(s_r) \cdot \frac{e^{\frac{isz}{a}}}{s^2 - a^2 k^2} \cdot ds, \end{aligned} \right.$$

$$(5,5) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta M_\varrho^{(e)}(r, \varphi, z) &= -\frac{\delta \mathfrak{H}_\varrho}{2\varrho} \cdot i \frac{\varrho}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cdot \cos n \varphi \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s}{\sqrt{s^2 - a^2 k^2}} \cdot J'_n(s_\varrho) H_n^{(1)}(s_r) \cdot e^{\frac{isz}{a}} \cdot ds. \end{aligned} \right.$$

Sie sind gültig für  $r > \varrho$  und bedürfen nur einer Vertauschung von  $s_r$  und  $s_\varrho$ , um dann für  $r < \varrho$  gültig zu sein. Damit ist auch für den frei schwingenden radialen Dipol eine Zerlegung des gesamten primären Strahlungsfeldes in zwei relativ zum Bezugssystem der  $(r, \varphi, z)$  transversale Felder erreicht.

6. Die vollständigen Lösungen für  $\delta E_\varrho$  und  $\delta M_\varrho$ . Wir können danach auch sofort die Ausdrücke für  $\delta E_\varrho$  und  $\delta M_\varrho$  anschreiben, wenn die Strahlung des Dipols nach den Gl. (5,4) und (5,5) nicht in den freien Raum hinaus, sondern im Innern des zylindrischen Hohlleiters mit dem Radius  $a$  erfolgt. Auch im vorliegenden Falle läßt sich nämlich die Forderung nach dem Verschwinden der Tangentialkomponenten des gesamten Feldes  $\mathfrak{E}^{(1)} + \mathfrak{E}^{(2)}$  an der Zylinderfläche  $r = a$  für  $\delta E_\varrho$  und  $\delta M_\varrho$  auf die Form der Gl. (3,1) und (3,2) bringen. Nach einer leichten Zwischenrechnung ergibt sich dann für die  $z$ -Komponenten  $\delta E_\varrho$  und  $\delta M_\varrho$  der beiden Hertzschen Vektoren, mit deren Hilfe wie vordem alle Feldkomponenten des Hohlleiterfeldes über die Gl. (2,9) und (2,10) berechnet werden können, die folgende Darstellung:

$$(6,1) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta E_\varrho(r, \varphi, z) &= -\frac{g^{(m)}}{2} \cdot \delta \mathfrak{H}_\varrho \cdot i \frac{\varrho}{a} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \cdot n \cdot \sin n \varphi \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F_\varrho^{(e)}\left(n; \frac{\varrho}{a}, \frac{r}{a}; \sqrt{s^2 - a^2 k^2}\right) \cdot e^{\frac{isz}{a}} \cdot ds, \end{aligned} \right.$$

$$(6,2) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta M_e(r, \varphi, z) &= -\frac{\delta \mathfrak{M}_e}{2\varrho} \cdot i \frac{\varrho}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cdot \cos n\varphi \\ &\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F_e^{(m)}\left(n; \frac{\varrho}{a}, \frac{r}{a}; \sqrt{s^2 - a^2 k^2}\right) \cdot e^{\frac{isz}{a}} \cdot ds. \end{aligned} \right.$$

Hierin sind die beiden Hilfsfunktionen  $F_e^{(e)}$  und  $F_e^{(m)}$  für ein  $r > \varrho$  durch die weiteren Gleichungen definiert:

$$(6,3) \quad \left\{ \begin{aligned} F_e^{(e)}\left(n; \frac{\varrho}{a}, \frac{r}{a}; \sqrt{s^2 - a^2 k^2}\right) &= \frac{1}{s^2 - a^2 k^2} \cdot \frac{J_n(s_e)}{J_n(s_a)} \\ &\cdot \{H_n^{(1)}(s_r) J_n'(s_a) - H_n^{(1)'}(s_a) J_n(s_r)\}, \end{aligned} \right.$$

$$(6,4) \quad \left\{ \begin{aligned} F_e^{(m)}\left(n; \frac{\varrho}{a}, \frac{r}{a}; \sqrt{s^2 - a^2 k^2}\right) &= \frac{s}{\sqrt{s^2 - a^2 k^2}} \cdot \frac{J_n'(s_e)}{J_n(s_a)} \\ &\cdot \{H_n^{(1)}(s_r) J_n(s_a) - H_n^{(1)'}(s_a) J_n(s_r)\}. \end{aligned} \right.$$

Für ein  $r < \varrho$  haben  $s_r$  und  $s_e$  lediglich ihre Plätze zu vertauschen.

7. Die doppelt unendliche Reihe der Eigenfunktionen für  $\delta E_e$  und  $\delta M_e$ . Der Übergang von den Darstellungen (6,1) und (6,2) für  $\delta E_e$  und  $\delta M_e$  durch Summe und Integral zu einer doppelt unendlichen Reihe läßt sich wie im Abschn. II mit Hilfe des Residuensatzes vollziehen und auf die gleiche Weise rechtfertigen. Auch die Beiträge, die zu diesen Entwicklungen von den beiden Polen  $\pm ak$  beigesteuert werden, sind wiederum derart beschaffen, daß sie das resultierende Feld nicht beeinflussen. Wir lassen sie daher im folgenden auch hier beiseite. Für die Berechnung der Residuen der Funktionen  $F_e^{(e)}$  und  $F_e^{(m)}$  in den unendlich vielen Polen der beiden Polketten  $s = \pm s_p$  und  $s = \pm s_p'$  sind im übrigen alle erforderlichen Angaben in Abschn. 2 des mathematischen Anhangs zu finden.

Für die  $z$ -Komponenten  $\delta E_e$  und  $\delta M_e$  der beiden Hertzschen Vektoren, die den transversal elektrischen und magnetischen Anteil im vollständigen Strahlungsfeld eines von der Zylinderfläche  $r = a$  umhüllten radialen Dipols beschreiben, ergeben sich damit die folgenden Formeln:

$$(7,1) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta E_e(r, \varphi, z) &= +i \cdot g^{(m)} \cdot \delta \mathfrak{M}_e \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_n \cdot \frac{j_{np}' \cdot \sin n\varphi}{j_{np}'^2 - n^2} \\ &\cdot \frac{2n}{j_{np}' \cdot \frac{\varrho}{a}} J_n\left(\frac{\varrho}{a} j_{np}'\right) \cdot \frac{J_n\left(\frac{r}{a} j_{np}'\right)}{J_n^2(j_{np}')^2} \cdot \frac{e^{\pm i \cdot \frac{z}{a} \cdot \sqrt{a^2 k^2 - j_{np}'^2}}}{\sqrt{a^2 k^2 - j_{np}'^2}}, \end{aligned} \right.$$

$$(7,2) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta M_e(r, \varphi, z) = & \pm \frac{\delta \mathfrak{M}_e}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_n \cdot \frac{\cos n \varphi}{j_{np}} \cdot 2 J'_n \left( \frac{\varrho}{a} j_{np} \right) \\ & \cdot \frac{J_n \left( \frac{r}{a} j_{np} \right)}{J_n'^2(j_{np})} \cdot e^{\pm i \cdot \frac{z}{a} \cdot \sqrt{a^2 k^2 - j_{np}^2}} \end{aligned} \right.$$

In diesen Gleichungen ist wieder das obere Vorzeichen zu wählen für  $z > 0$  und das untere für  $z < 0$ . Im übrigen gelten sie für jedes  $r$  im Bereich  $0 \leq r \leq a$ .

Wie der unmittelbare Vergleich von (7,1) und (7,2) mit den entsprechenden Gl. (4,3) und (4,4) für den tangentialen Dipol lehrt, unterscheiden sich die beiden Gleichungspaare im wesentlichen nur in zwei Punkten. Der eine Unterschied besteht in einer Verdrehung des Sterns der Knotenstrahlen. Für jede Oberwelle in jeder der beiden Teilfelder liegen nämlich in dem einen Falle die Knotenstrahlen dort, wo im anderen Falle die Strahlen durch die Bäuche der Schwingungen gehen. Die Lage der Knotenkreise ist hingegen in beiden Fällen die gleiche. Der zweite Unterschied liegt in dem Gesetz der Amplitudenverteilung. Aber auch hier macht er sich lediglich in einer Vertauschung zweier gleichartiger Faktoren geltend. Während nämlich in der Gleichung für  $\delta E_r$  der Faktor

$$2 \cdot J'_n \left( \frac{\varrho}{a} j'_{np} \right) = J_{n-1} \left( \frac{\varrho}{a} j'_{np} \right) - J_{n+1} \left( \frac{\varrho}{a} j'_{np} \right)$$

auftritt, steht in der Gleichung für  $\delta E_z$  der Faktor

$$\frac{2n}{j'_{np} \cdot \frac{\varrho}{a}} \cdot J_n \left( \frac{\varrho}{a} j'_{np} \right) = J_{n-1} \left( \frac{\varrho}{a} j'_{np} \right) + J_{n+1} \left( \frac{\varrho}{a} j'_{np} \right)$$

und in den Beziehungen für  $\delta M_r$  und  $\delta M_e$  ist es gerade umgekehrt.

Die beiden Gleichungspaare (4,3), (4,4) und (7,1), (7,2) gestatten eine gemeinsame Kontrolle. Läßt man nämlich in diesen Gleichungen  $\varrho \rightarrow 0$  gehen, so beschreiben beide das Strahlungsfeld eines Dipols, dessen Mittelpunkt in der Zylinderachse liegt und dessen Richtung das eine Mal mit der  $x$ -Achse, das andere Mal mit der  $y$ -Achse zusammenfällt. Zwei solche Strahlungsfelder sind jedoch nicht wesentlich voneinander verschieden, denn das eine kann in das andere durch eine Drehung um den Winkel  $\pi/2$  übergeführt werden. Nun ergibt sich aber z. B. aus den Gl. (7,1) und (7,2) mit  $\varrho = 0$  für einen elektrischen Dipol in Richtung der  $x$ -Achse das Gleichungssystem:

$$(7,3) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta E_{\xi}(r, \varphi, z) &= 2 \cdot i \cdot g^{(m)} \cdot \delta \mathfrak{R}_{\xi} \sin \varphi \\ &\cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{j'_{1p}}{j_{1p}^2 - 1} \cdot \frac{J_1\left(\frac{r}{a} j_{1p}\right)}{J_1^2(j_{1p})} \cdot e^{\pm i \cdot \frac{z}{a} \cdot \sqrt{a^2 k^2 - j_{1p}^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 k^2 - j_{1p}^2}} \end{aligned} \right.$$

$$(7,4) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta M_{\xi}(r, \varphi, z) &= \pm 2 \cdot \frac{\delta \mathfrak{R}_{\xi}}{a} \cdot \cos \varphi \\ &\cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{j_{1p}} \cdot \frac{J_1\left(\frac{r}{a} j_{1p}\right)}{J_1^2(j_{1p})} \cdot e^{\pm i \cdot \frac{z}{a} \cdot \sqrt{a^2 k^2 - j_{1p}^2}} \end{aligned} \right.$$

Für einen Dipol, der mit  $\varphi = 0$  die Richtung der  $y$ -Achse hat, entstehen andererseits aus (4,3) und (4,4) zwei Gleichungen, die sich von den beiden obigen nur darin unterscheiden, daß in (7,3) statt  $\sin \varphi$  der Faktor  $-\cos \varphi$  und in (7,4) statt  $\cos \varphi$  der Faktor  $\sin \varphi$  steht. Das ist aber gerade die Änderung, die der Ersatz von  $\varphi$  durch  $\varphi - \frac{\pi}{2}$  an den Gl. (7,3) und (7,4) bewirkt.

Die oben besprochenen Unterschiede zwischen den Gleichungen für den tangentialen und den radialen Dipol berühren in keiner Weise die Tatsache, daß auch zu einem radialen Dipol und mithin überhaupt zu jedem elektrischen Dipol, dessen Richtung auf der Achse des Hohlleiters senkrecht steht, zwei miteinander gekoppelte Felder gehören, von denen das eine ein transversal elektrisches und das andere ein transversal magnetisches Feld darstellt. Für die kritischen Wellenlängen und die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Phasen gelten dabei allemal die schon früher dafür mitgeteilten Formeln. Da jedoch beim radialen Dipol die Summationsvariable  $n$  in den beiden Gl. (7,1) und (7,2) gegenüber den entsprechenden Beziehungen für den tangentialen Dipol in vertauschter Reihenfolge zu zählen beginnt, so spielen sich beim radialen Dipol die bei stetiger Steigerung der Frequenz wahrzunehmenden Vorgänge wenigstens anfänglich etwas anders ab. Zunächst löst sich allerdings wiederum bei der Wellenlänge  $_{\epsilon} \lambda_{11}^{(e)} = 3,413 a \cdot \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{1/2}$  cm die Welle  $TE_{11}$  ab, dann aber folgt bei der Wellenlänge  $_{\epsilon} \lambda_{10}^{(m)} = 2,613 \cdot a \cdot \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{1/2}$  cm der Wellentypus  $TM_{10}$ . Daran schließen sich dann wie vordem bei der Wellenlänge  $_{\epsilon} \lambda_{12}^{(e)} = 2,057 \cdot a \cdot \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{1/2}$  cm die Welle  $TE_{12}$  und bei der Wellenlänge  $_{\epsilon} \lambda_{11}^{(m)} = 1,640 \cdot a \cdot \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{1/2}$  cm die Welle  $TM_{11}$ . Der Wellentypus  $TE_{10}$  fehlt im vorliegenden Falle ganz.

### III. Das Strahlungsfeld der magnetischen Dipole

8. *Das Beispiel des tangentialen magnetischen Dipols.* Neben dem elektrischen Dipol, der für die Rechnung die felderzeugende Wirkung der elementaren Stabantenne ersetzt, ist praktisch fast von der gleichen Bedeutung der magnetische Dipol, der das gleiche für die elementare Rahmenantenne leistet. Es versteht sich von selbst, daß das Strahlungsfeld eines magnetischen Dipols auf ganz dieselbe Weise berechnet werden könnte wie das des elektrischen Dipols. Da aber durch die Gl. (1,1), (4,3), (4,4) und (7,1), (7,2) bereits die Beziehungen für die Hertzschen Vektoren sowohl eines axialen als auch eines radialen und tangentialen Dipols bekannt sind, können wir uns die Ausdrücke für die entsprechenden drei magnetischen

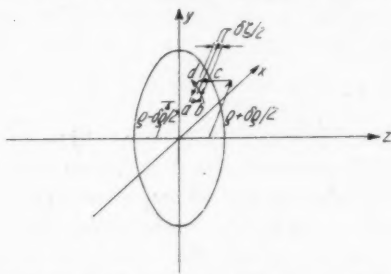


Abb. 4. Der magnetische tangentielle Dipol und sein Ersatz durch zwei Paar elektrischer Dipole in axialer und radialer Richtung

Dipole auf viel einfachere Weise verschaffen als durch eine direkte Berechnung. Zu diesem Zweck brauchen wir uns nur daran zu erinnern, daß z. B. gemäß Abb. 4 ein magnetischer tangentialer Dipol eben weil er ja eine Rahmenantenne verkörpert, auch durch das Rähmchen  $a, b, c, d$  aus je zwei parallelen und entgegengesetzt gleichen elektrischen Dipolen ersetzt werden darf. Hiervon sind die Rahmenseiten  $ab$  und  $cd$  zwei axiale Dipole, während die anderen beiden Seiten  $bc$  und  $da$  zwei radiale Dipole darstellen. Dieser Zusammenhang macht es sofort klar, daß auch ein tangentialer magnetischer Dipol ein Strahlungsfeld erzeugt, das aus zwei miteinander verkoppelten Teilfeldern von transversal elektrischem und magnetischem Charakter besteht. Da von den vier elektrischen Dipolen der Abb. 4 nur das Dipolpaar  $bc, da$  ein transversal elektrisches Feld hervorruft, so läßt sich offenbar das entsprechende Teilfeld des tangentialen magnetischen Dipols einfach dadurch berechnen, daß man mittels der Gl. (7,1) zunächst die Beziehungen für zwei Dipole mit den Koordinaten  $(\varrho, 0, \pm \frac{\delta z}{2})$  aufstellt und dann

ihre Differenz bildet. Die Größe  $\delta\zeta$  kann dabei als so klein aufgefaßt werden, daß die zugehörige Reihenentwicklung mit dem ersten Gliede abgebrochen werden kann. Auf diese Weise ergibt sich für die Vektorkomponente  $\delta E_z$  des magnetischen Dipols die Formel:

$$(8,1) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta E_z(r, \varphi, z) = \mp g^{(m)} \cdot \frac{\Im \cdot \delta F}{4\pi a} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_n \cdot \frac{j'_{np} \cdot \sin n\varphi}{j'_{np}{}^2 - n^2} \\ \cdot \frac{2n}{j'_{np} \cdot \frac{\varrho}{a}} J_n\left(\frac{\varrho}{a} j'_{np}\right) \cdot \frac{J_n\left(\frac{r}{a} j'_{np}\right)}{J_n^2(j'_{np})} \cdot e^{\pm i \cdot \frac{z}{a} \cdot \sqrt{a^2 k^2 - j'_{np}{}^2}} \end{aligned} \right.$$

Das transversal magnetische Teilfeld wird sowohl von dem axialen Dipolpaar als auch von dem radialen Dipolpaar erzeugt. Das radiale Dipolpaar wird gebildet von den beiden Dipolen mit den Lagekoordinaten  $(\varrho, 0, \pm \frac{\delta\zeta}{2})$  und das axiale Dipolpaar von den Dipolen mit den Koordinaten  $(\varrho \pm \frac{\delta\varrho}{2}, 0, 0)$ . Bildet man wieder mittels der Gl. (1,1) und (7,2) die zugehörigen Differenzen und faßt zusammen, so entsteht für die  $z$ -Komponente des Hertzschen Vektors  $\delta M_z$ , der das transversal magnetische Feld beschreibt, die Darstellung:

$$(8,2) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta M_z(r, \varphi, z) = i \cdot \frac{\Im \cdot \delta F}{4\pi} \cdot k^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_n \cdot \frac{\cos n\varphi}{j_{np}} \cdot 2J'_n\left(\frac{\varrho}{a} j_{np}\right) \\ \cdot \frac{J_n\left(\frac{r}{a} j_{np}\right)}{J_n^2(j_{np})} \cdot \frac{e^{\pm i \cdot \frac{z}{a} \cdot \sqrt{a^2 k^2 - j_{np}^2}}}{\sqrt{a^2 k^2 - j_{np}^2}} \end{aligned} \right.$$

In den Gl. (8,1) und (8,2) wird die Stärke des magnetischen Dipols gemessen durch das Produkt aus der Stromstärke in den Rähmchendraht und der Fläche  $\delta F = \delta\zeta \cdot \delta\varrho$  des Rähmchens. Wünscht man sie durch die auf die Rähmchenbreite  $\varrho \delta\varphi$  bezogene Spannung an seinen Klemmen zu messen, so kann man dabei von der Beziehung Gebrauch machen:

$$(8,3) \quad -U_{\varphi} \cdot \varrho \delta\varphi = g^{(m)} \cdot \lim (\Im \cdot \delta F).$$

Eine weitere Erörterung des hiermit für den tangentialen magnetischen Dipol gewonnenen Ergebnisses darf wohl in Anbetracht der großen Ähnlichkeit im Aufbau der betreffenden Gleichungen unterbleiben. Es mag hier nur der eine Hinweis Platz finden, daß es bei einem magnetischen Dipol im Falle reeller Werte von  $k$  die

transversal magnetische Welle ist, die beim Durchgang durch die einzelnen Resonanzzustände zu sehr hohen Werten anwächst.

Die noch fehlenden Formeln für das Strahlungsfeld axialer und radialer magnetischer Dipole können in ganz ähnlicher Weise hergeleitet werden.

#### IV. Die scheinbaren Flächenladungen und Flächenströme der achsensenkrechten elektrischen Dipole in der Dipolebene $z = 0$

9. Die Flächenströme und Flächenladungen des transversal magnetischen Feldes. Durch die bisherigen Ergebnisse dürfte in der Hauptsache die anfangs aufgeworfene Frage nach der Natur und der Zusammensetzung der Strahlungsfelder von Dipolen, deren Richtung auf der Achse des zylindrischen Hohlleiters senkrecht steht, beantwortet sein. Wir wollen jedoch diese Untersuchungen nicht abschließen, ohne noch ausführlicher auf die Vorgänge in der den Dipol enthaltenden Ebene  $z = 0$  einzugehen, da sich in ihr als der Scheidewand zwischen den nach entgegengesetzten Richtungen fortleitenden Wellenzügen offenbar der Zerfall des gesamten Strahlungsfeldes in die  $2 \cdot \infty^2$ -fache Mannigfaltigkeit von Teilfeldern in besonderer Weise widerspiegeln muß.

Wir betrachten zu diesem Zweck zunächst ein einzelnes Oberfeld  $TM_{pn}$  des transversal magnetischen Feldes und schreiben die Beziehung für den zugehörigen Hertzschen Vektor in der allgemeinen Form der Gl. (9,1) an. In ihr bezieht sich wie vordem das obere Vorzeichen auf den Fall  $z > 0$  und das untere Vorzeichen auf den Fall  $z < 0$ .

$$(9,1) \quad \left\{ \begin{aligned} M^{(p,n)}(r, \varphi, z) = & \pm \left\{ A_{n,p}^{(m)} \cdot \cos n \varphi + B_{n,p}^{(m)} \cdot \sin n \varphi \right\} \\ & \cdot J_n \left( \frac{r}{a} j_{np} \right) \cdot e^{\pm i \cdot \frac{z}{a} \cdot \sqrt{a^2 k^2 - j_{np}^2}} \end{aligned} \right.$$

Für den tangentialen elektrischen Dipol an der Stelle  $(\varrho, 0, 0)$  ist dann im besonderen

$$(9,2a) \quad A_{n,p}^{(m)} = 0, \quad B_{n,p}^{(m)} = \frac{\delta \mathfrak{H}_\tau}{a} \cdot \frac{\gamma_n}{j_{np}} \cdot \frac{2n}{j_{np} \cdot \frac{\varrho}{a}} \cdot J_n \left( \frac{\varrho}{a} j_{np} \right) \cdot \frac{1}{J_n^2(j_{np})}$$

und für den ebenfalls an der Stelle  $(\varrho, 0, 0)$  gelegenen radialen elektrischen Dipol

$$(9,2b) \quad A_{n,p}^{(m)} = \frac{\delta \mathfrak{H}_\varrho}{a} \cdot \frac{\gamma_n}{j_{np}} \cdot 2 J_n' \left( \frac{\varrho}{a} j_{np} \right) \cdot \frac{1}{J_n'^2(j_{np})}, \quad B_{n,p}^{(m)} = 0.$$



Aus den beiden Gl. (2,10 $\alpha$ ,  $\beta$ ) geht nun sofort hervor, daß die Komponenten  $\mathfrak{H}_r^{(2)}$  und  $\mathfrak{H}_\varphi^{(2)}$  des zu der Oberwelle  $TM_{pn}$  gehörenden magnetischen Feldes in der Fläche  $z = 0$  einen Sprung erfahren. Dieser Sprung in den tangentiellen Komponenten von  $\mathfrak{H}$  läßt sich einem fiktiven elektrischen Flächenstrom  $\mathfrak{f}(r, \varphi)$  zuschreiben, der

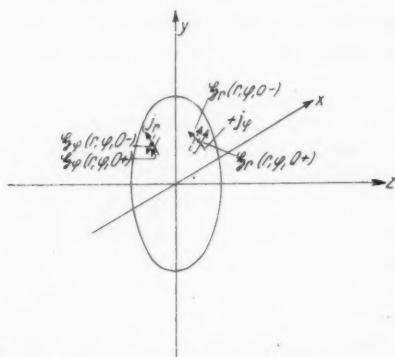


Abb. 5. Der Zusammenhang zwischen den Feldkomponenten  $\mathfrak{H}_r$  und  $\mathfrak{H}_\varphi$  und den Strömungskomponenten  $j_r \equiv \mathfrak{f}_r$  und  $j_\varphi \equiv \mathfrak{f}_\varphi$

ausschließlich in der Fläche  $z = 0$  verläuft. Der Zusammenhang zwischen seinen beiden Komponenten  $\mathfrak{f}_r$  und  $\mathfrak{f}_\varphi$  und den Sprungkomponenten geht gemäß Abb. 5 aus den beiden Gl. (9,3a) und

$$(9,3a) \quad \mathfrak{H}_r(r, \varphi, 0+) - \mathfrak{H}_r(r, \varphi, 0-) = \mathfrak{f}_\varphi(r, \varphi),$$

$$(9,3b) \quad \mathfrak{H}_\varphi(r, \varphi, 0+) - \mathfrak{H}_\varphi(r, \varphi, 0-) = -\mathfrak{f}_r(r, \varphi).$$

(9,3b) hervor. Für das betrachtete Oberfeld ist mithin

$$(9,4a) \quad \begin{cases} \mathfrak{f}_\varphi(r, \varphi) = -\frac{j_{np}}{a} \cdot \{A_{n,p}^{(m)} \cdot \sin n\varphi - B_{n,p}^{(m)} \cdot \cos n\varphi\} \\ \cdot \frac{2n}{j_{np} \cdot \frac{a}{r}} \cdot J_n\left(\frac{r}{a} j_{np}\right), \end{cases}$$

$$(9,4b) \quad \mathfrak{f}_r(r, \varphi) = \frac{j_{np}}{a} \cdot \{A_{n,p}^{(m)} \cdot \cos n\varphi + B_{n,p}^{(m)} \cdot \sin n\varphi\} \cdot 2J_n'\left(\frac{r}{a} j_{np}\right).$$

Da die Divergenz dieses Flächenstroms im allgemeinen von Null verschieden ist, so besitzt er in der Fläche  $z = 0$  allenthalben Quellen und Senken. Hingegen ist die durch (9,4a, b) beschriebene

$$(9,4) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathfrak{f}(r, \varphi) = -2 \cdot \left(\frac{j_{np}}{a}\right)^2 \cdot \{A_{n,p}^{(m)} \cdot \cos n\varphi + B_{n,p}^{(m)} \cdot \sin n\varphi\} \\ \cdot J_n\left(\frac{r}{a} j_{np}\right) \end{cases}$$

Strömung wirbelfrei, und sie muß es auch sein, da sie wegen  $\mathfrak{H}_z^{(2)} \equiv 0$  von keinem Magnetfeld durchsetzt wird. Sie ist daher von einem Potential  $\Phi(r, \varphi)$  ableitbar, mit dem sie in dem Zusammenhang steht:  $\mathfrak{f}_\varphi = -r^{-1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$  und  $\mathfrak{f}_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ . Demnach gilt für  $\Phi(r, \varphi)$  die Relation:

$$(9,5) \quad \Phi(r, \varphi) = - \left\{ A_{n,p}^{(m)} \cdot \cos n \varphi + B_{n,p}^{(m)} \cdot \sin n \varphi \right\} \cdot 2 J_n \left( \frac{r}{a} j_{n,p} \right).$$

Die Ursachen der Quellen der Strömung (9,4a, b) erkennt man sofort, wenn man mit Hilfe von (2,10c) die linke Seite der Gl. (9,6)

$$(9,6) \quad \left\{ \begin{aligned} & g^{(e)} \cdot [\mathfrak{E}_z^{(2)}(r, \varphi, 0+) - \mathfrak{E}_z^{(2)}(r, \varphi, 0-)] \\ & = 2 \cdot \left( \frac{j_{n,p}}{a} \right)^2 \cdot \left\{ A_{n,p}^{(m)} \cdot \cos n \varphi + B_{n,p}^{(m)} \cdot \sin n \varphi \right\} \cdot J_n \left( \frac{r}{a} j_{n,p} \right) \end{aligned} \right.$$

bildet. Schreibt man noch für die an der Stelle  $r, \varphi$  in der Fläche  $z = 0$  aufgehäuften Flächenladung der Kürze halber  $q(r, \varphi)$  und

$$(9,7) \quad \varepsilon \cdot [\mathfrak{E}_z^{(2)}(r, \varphi, 0+) - \mathfrak{E}_z^{(2)}(r, \varphi, 0-)] = q(r, \varphi)$$

beachtet die für sie gültige Definitionsgleichung (9,7), so besteht in Rücksicht auf (9,4) in der Fläche  $z = 0$  für  $q(r, \varphi)$  die folgende Beziehung:

$$(9,8) \quad -\operatorname{div} \mathfrak{f}(r, \varphi) + i \omega \cdot q(r, \varphi) = \Delta \Phi + i \omega \cdot q(r, \varphi) = 0.$$

Im Gegensatz zu den Tangentialkomponenten von  $\mathfrak{H}^{(2)}$  gehen die Tangentialkomponenten von  $\mathfrak{E}^{(2)}$  stetig durch die Fläche  $z = 0$ . Sie beweisen durch dieses Verhalten die Abwesenheit magnetischer Flächenströme in der Ebene  $z = 0$ , und sie erzwingen damit zugleich wegen der überall verschwindenden Divergenz von  $\mathfrak{E}^{(2)}$  auch die Gleichheit der Normalableitung von  $\mathfrak{E}_z^{(2)}$  auf beiden Seiten der  $xy$ -Ebene. Das schließt seinerseits das Auftreten einer Doppelschicht elektrischer Ladungen aus.

Wir können infolgedessen sagen: Das durch die Gl. (9,1) beschriebene transversal magnetische Feld vom Typus  $TM_{p,n}$  kann erzeugt gedacht werden durch eine in der Fläche  $z = 0$  sitzende Verteilung elektrischer Einfachladungen der Flächendichte  $q(r, \varphi)$ , deren Verteilungsgesetz für  $-i \omega \cdot q(r, \varphi)$  die rechte Seite der Gl. (9,6) beschreibt. In der Fläche  $z = 0$  selbst verursacht sie durch die ständigen Ladungswechsel eine wirbelfreie Strömung mit den Komponenten  $\mathfrak{f}_r$  und  $\mathfrak{f}_\varphi$ , die nach dem Gesetz  $\mathfrak{f} = -\operatorname{grad} \Phi$  aus dem Potential  $\Phi(r, \varphi)$  der Gl. (9,5) abgeleitet werden kann. Die Verteilung der Ladungsdichte über den Querschnitt ist im übrigen so beschaffen, daß sie am Rande  $r = a$  überall verschwindet. Die

Ausgleichsströmung dieser Ladungsverteilung mündet normal in den Randkreis ein und findet dort ihre Fortsetzung in der nach rechts und links abfließenden axial gerichteten Wandströmung  $\hat{f}_z$ . In der Tat ist nach Gl. (1,10 $\beta$ ):

$$\hat{f}_z(a, \varphi, 0 \pm) = \mathfrak{H}_{\varphi}^{(2)}(a, \varphi, \pm 0) = \pm \frac{1}{2} \cdot \hat{f}_r(a, \varphi).$$

Da dieses Ergebnis für ein Teilfeld  $TM_{pn}$  mit beliebigen Werten für  $n$  und  $p$  gilt, so muß es auch möglich sein, für jede beliebig vorgegebene Ladungsverteilung  $-i\omega \cdot q(r, \varphi)$  in der Fläche  $z = 0$ , sofern für sie stets  $q(a, \varphi) = 0$  ist, das von ihr im Hohlleiter erzeugte Strahlungsfeld anzugeben. Ist es doch dazu nur erforderlich, die Koeffizienten  $A_{np}$  und  $B_{np}$  der Gl. (9,6) für die Ladungsverteilung zu kennen. Diese Koeffizienten lassen sich aber bei vorgegebenem  $q(r, \varphi)$  nach dem verallgemeinerten Fourierschen Verfahren leicht ermitteln. Setzen wir nämlich willkürlich an

$$-i\omega \cdot q(\varrho, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_{np} \cdot \cos n\psi + \beta_{np} \cdot \sin n\psi) \cdot J_n\left(\frac{\varrho}{a} j_{np}\right)$$

und integrieren zunächst nach Multiplikation mit  $J_n\left(\frac{r}{a} \cdot j_{np}\right) \cdot r$  zwischen den Grenzen 0 und  $a$  über  $r$ , so erhält man nach bekannten Formeln

$$\begin{aligned} & -i\omega \cdot \int_0^a q(\varrho, \psi) \cdot J_n\left(\frac{\varrho}{a} j_{np}\right) \cdot \varrho \cdot d\varrho \\ &= \frac{a^2}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{np} \cdot \cos n\psi + \beta_{np} \cdot \sin n\psi) \cdot J_n'^2(j_{np}). \end{aligned}$$

Hieraus folgen dann endgültig für  $\alpha_{np}$  und  $\beta_{np}$  oder besser gleich für die Koeffizienten  $A_{np}$  und  $B_{np}$  in der Bedeutung der Gl. (9,6) die nachstehenden beiden Bestimmungsgleichungen:

$$(9,9) \quad \begin{cases} \begin{Bmatrix} A_{np}^{(m)} \\ B_{np}^{(m)} \end{Bmatrix} = \frac{j_{np}}{2\pi \cdot j_{np}^2 \cdot J_n'^2(j_{np})} \cdot (-i\omega) \\ \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^a q(\varrho, \psi) J_n\left(\frac{\varrho}{a} j_{np}\right) \cdot \begin{Bmatrix} \cos n\psi \\ \sin n\psi \end{Bmatrix} \cdot \varrho \cdot d\varrho \cdot d\psi. \end{cases}$$

Werden die nach dieser Formel aus der gegebenen Ladungsverteilung  $q(\varrho, \psi)$  ermittelten Koeffizienten  $A_{np}^{(m)}$  und  $B_{np}^{(m)}$  nach gleichzeitiger Summation über  $n$  und  $p$  in die Gl. (9,1) eingesetzt, so hat man damit zugleich die vollständige Beziehung für die

$z$ -Komponente  $M$  desjenigen Hertzschen Vektors, der über die Gl. (2,10) das zu der gegebenen Ladungsverteilung gehörende transversal magnetische Feld beschreibt. Die mathematische Zulässigkeit der oben beschriebenen Operationen folgt aus den allgemeinen Sätzen der Theorie der Integralgleichungen über quellenmäßig darstellbare Funktionen.

Wir machen auf die Formel (9,9) die Probe, indem wir in der Fläche  $z = 0$  diejenige Ladungsverteilung als gegeben ansehen, die etwa einem radial angeordneten Dipol entspricht. Ist die bei  $\varrho$  und  $\psi = 0$  gelegene Dipolladung  $+e$  und die bei  $\varrho + d\varrho$  und  $\psi = 0$  gelegene Ladung  $-e$ , so ist offenbar in (9,9)  $\psi = 0$  und  $q(\varrho, \psi) \cdot \varrho \cdot d\varrho \cdot d\psi = \pm e$  zu setzen. Für das Doppelintegral allein ergibt sich dann

$$+e \cdot J_n \left( \frac{\varrho}{a} j_{np} \right) - e \cdot J_n \left( \frac{\varrho + d\varrho}{a} \cdot j_{np} \right) = -e \cdot \frac{d\varrho}{a} \cdot j_{np} \cdot J_n' \left( \frac{\varrho}{a} j_{np} \right)$$

und da  $i\omega \cdot e \cdot \delta\varrho = \Im \cdot \delta\varrho = 4\pi \cdot \delta\mathfrak{H}_e$  zu setzen ist, so entsteht auf diese Weise tatsächlich das Gleichungssystem (9,2b).

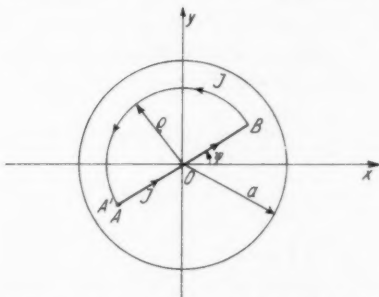


Abb. 6. Der halbkreisförmige Sender  $ABA'$  besitzt kein  $TM$ -Feld bei einem Erregerstrom konstanter Amplitude und Phase

Die Gl. (9,9) verhilft uns aber noch in anderer Weise zu einem tieferen Einblick in die Entstehungsursache des transversal magnetischen Feldes. Sie lehrt uns nämlich, daß, wenn zur Erregung des Hohlleiterfeldes ein in der Ebene  $z = 0$  in sich geschlossenes Stromsystem benutzt wird, wegen  $q(r, \varphi) = 0$  das transversal magnetische Feld überhaupt nicht auftritt. Dabei ist es allerdings wesentlich, daß der Strom in einem solchen Sender überall die gleiche Größe und Phase hat, da anderenfalls am Leiter selbst eine stetige Quellenverteilung besteht. Wir wollen dieses Erkenntnis an dem Beispiel des in Abb. 6 dargestellten Senders belegen. Dieser Sender möge den Hochfrequenzstrom an den beiden dicht nebeneinanderliegenden

Punkten  $A$  und  $A'$  zugeführt bekommen und im übrigen so kleine Abmessungen haben, daß die Stromstärke auf den Leitern  $AB$  und  $BA'$  als überall gleichgroß und gleichphasig betrachtet werden darf.

Wir berechnen dann zunächst die  $z$ -Komponente des Hertzschen Vektors  $M_z$  nach Gl. (4,4) für das Leiterstück  $BA'$ . Sie ergibt sich aus dieser Gleichung nach dem Ersatz von  $\sin(n\varphi)$  durch  $\sin(n(\varphi - \psi))$  mittels einer Integration über  $\psi$  zwischen den Grenzen  $\psi$  und  $\psi + \pi$ . Man erhält so

$$(9,10) \quad \left\{ \begin{aligned} M_{BA'} &= \mp \frac{\mathfrak{J}}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_n \cdot \frac{\cos n(\varphi - \psi)}{j_{np}^2} \cdot \left| \sin \frac{\pi}{2} n \right| \\ &\quad \cdot J_n \left( \frac{\varrho}{a} j_{np} \right) \cdot \frac{J_n \left( \frac{r}{a} j_{np} \right)}{J_n'^2(j_{np})} \cdot e^{\pm i \cdot \frac{z}{a} \cdot \sqrt{a^2 k^2 - j_{np}^2}}. \end{aligned} \right.$$

Um den Beitrag des Leiterstücks  $AB$  zum Vektor  $M$  zu finden, haben wir für das Stück  $AO$   $\varphi = \psi + \pi$  und  $\delta \mathfrak{H}_e = -\mathfrak{J} \cdot \delta \varphi$  zu setzen, hingegen für das Stück  $OB$   $\varphi = \psi$  und  $\delta \mathfrak{H}_e = \mathfrak{J} \cdot \delta \varphi$  und hinterher über  $\varphi$  zwischen den Grenzen 0 und  $\varrho$  zu integrieren. Auf diese Weise entsteht die Beziehung:

$$(9,11) \quad \left\{ \begin{aligned} M_{AB} &= \pm \frac{\mathfrak{J}}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_n \cdot \frac{\cos n(\varphi - \psi)}{j_{np}^2} \cdot \left| \sin \frac{\pi}{2} n \right| \\ &\quad \cdot J_n \left( \frac{\varrho}{a} j_{np} \right) \cdot \frac{J_n \left( \frac{r}{a} j_{np} \right)}{J_n'^2(j_{np})} \cdot e^{\pm i \cdot \frac{z}{a} \cdot \sqrt{a^2 k^2 - j_{np}^2}}. \end{aligned} \right.$$

Diese beiden Ausdrücke sind aber tatsächlich entgegengesetzt gleich. Ein Sender nach Art von Abb. 5 erzeugt demnach lediglich ein transversal elektrisches Feld, und dasselbe gilt von jedem Sender, der aus einer beliebigen, ganz in einer Querschnittsebene gelegenen und in sich geschlossenen Stromschleife besteht und durchweg einen Strom gleicher Höhe und Phase führt.

Wird der Sender von Abb. 5 allein von dem Leiterstück  $AB$  gebildet, so verschwindet natürlich die Vektorkomponente  $M$  nicht mehr. Der für sie aufgestellte Ausdruck (9,11) bleibt jedoch dann unter den angegebenen Bedingungen über die Stromverteilung stets derselbe, wie auch immer der Leiter selbst zwischen den Endpunkten  $AB$  verläuft. Dieselbe Tatsache bringt in anderer Form die auch auf diesen Fall anwendbare Gl. (9,9) zum Ausdruck, läßt sich doch aus ihr sofort die Gl. (9,11) reproduzieren. Die Ver-

schiedenheit in der Leiterführung der beiden Senderformen von Abb. 5 beeinflusst also nur das Amplitudenspektrum des transversal elektrischen Feldes. Eine Anwendung der Gl. (9,9) auf Sender mit stetig verteilten Quellen wird am Schluß von Abschn. 12,3 besprochen.

10. Die Flächenströme und Flächenladungen des transversal elektrischen Feldes. Wir gehen nun in genau derselben Weise bei der Erörterung der transversal elektrischen Welle vor und betrachten demgemäß auch hierbei nur ein einzelnes Teilfeld  $TE_{np}$  in der Verallgemeinerung der Gl. (10,1). Auch hierin bezieht sich wie

$$(10,1) \quad \left\{ \begin{array}{l} E^{(p,n)} = \{ A_{n,p}^{(e)} \cdot \cos n\varphi + B_{n,p}^{(e)} \cdot \sin n\varphi \} \\ \cdot J_n \left( \frac{r}{a} j'_{np} \right) \cdot e^{\pm i \cdot \frac{z}{a} \cdot \sqrt{a^2 k^2 - j'^2_{np}}} \end{array} \right.$$

immer das obere Vorzeichen auf den Fall  $z > 0$  und das untere auf den Fall  $z < 0$ .

Für den tangentialen elektrischen Dipol an der Stelle  $(\varrho, 0, 0)$  ist in (10,1) zu setzen

$$(10,2a) \quad A_{np}^{(e)} = -i \cdot g^{(m)} \cdot \delta \mathfrak{R}_\tau \cdot \frac{j_n \cdot j'_{np}}{j'^2_{np} - n^2} \cdot \frac{2J'_n \left( \frac{\varrho}{a} j'_{np} \right)}{J_n^2(j'_{np}) \sqrt{a^2 k^2 - j'^2_{np}}}, \quad B_{n,p}^{(e)} = 0$$

und für den radialen elektrischen Dipol an der Stelle  $(\varrho, 0, 0)$

$$(10,2b) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{np}^{(e)} = 0, \quad B_{n,p}^{(e)} = +i \cdot g^{(m)} \cdot \delta \mathfrak{R}_\varrho \cdot \frac{j_n \cdot j'_{np}}{j'^2_{np} - n^2} \\ \cdot \frac{2n}{j'_{np} \cdot \frac{\varrho}{a}} \cdot J_n \left( \frac{\varrho}{a} j'_{np} \right) \cdot \frac{1}{J_n^2(j'_{np}) \sqrt{a^2 k^2 - j'^2_{np}}} \end{array} \right.$$

Auch im vorliegenden Falle erleiden dann die beiden tangentialen Komponenten  $\mathfrak{E}_r^{(1)}$  und  $\mathfrak{E}_\varphi^{(1)}$  beim Durchgang durch die Fläche  $z = 0$  einen endlichen Sprung. Die Komponenten der flächenhaften Strömung, in der die Ursache dieser Sprünge erblickt werden kann, bilden jedoch diesmal gemäß den Gl. (10,3a) und (10,3b) eine in

$$(10,3a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{F}_\varphi^{(p,n)}(r, \varphi) = \frac{i}{g^{(m)}} \cdot \frac{j'_{np}}{a^2} \sqrt{a^2 k^2 - j'^2_{np}} \\ \cdot \{ A_{n,p}^{(e)} \cdot \cos n\varphi + B_{n,p}^{(e)} \cdot \sin n\varphi \} \cdot 2J'_n \left( \frac{r}{a} j'_{np} \right), \end{array} \right.$$

$$(10,3b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{F}_r^{(p,n)}(r, \varphi) = \frac{i}{g^{(m)}} \cdot \frac{j'_{np}}{a^2} \sqrt{a^2 k^2 - j'^2_{np}} \\ \cdot \{ A_{n,p}^{(e)} \cdot \sin n\varphi - B_{n,p}^{(e)} \cdot \cos n\varphi \} \cdot \frac{2n}{j'_{np} \cdot \frac{r}{a}} \cdot J_n \left( \frac{r}{a} j'_{np} \right) \end{array} \right.$$

der Fläche  $z = 0$  verlaufende, quellenfreie Strömung. Als solche muß sie sich durch den Wirbel der  $z$ -Komponente eines Hilfsvektors darstellen lassen dergestalt, daß  $\mathbf{f}_r = r^{-1} \cdot \frac{\partial \chi_z}{\partial \varphi}$  und  $\mathbf{f}_\varphi = -\frac{\partial \chi_z}{\partial r}$  ist. Für diese Vektorkomponente besteht also die Gleichung:

$$(10,4) \quad \left\{ \begin{aligned} \chi_z^{(p,n)}(r, \varphi) &= -i \cdot \frac{\sqrt{a^2 k^2 - j_{np}^2}}{a \cdot g^{(m)}} \\ &\cdot \{ A_{n,p}^{(e)} \cdot \cos n \varphi + B_{n,p}^{(e)} \cdot \sin n \varphi \} \cdot 2 J_n \left( \frac{r}{a} j_{np} \right). \end{aligned} \right.$$

Die Hilfsfunktion  $\chi_z$  hat die physikalische Bedeutung einer Stromfunktion. Es ist also die Differenz ihrer Funktionswerte in zwei beliebigen Punkten gleich dem Stromfluß zwischen diesen Punkten. Dabei spielt es keine Rolle, wie man sich diese Punkte miteinander verbunden denkt, da ja das ganze Strömungsgebiet quellenfrei ist. Der durch die Gl. (13,3a, b) beschriebene Stromlinienverlauf in der Fläche  $z = 0$  entspricht im übrigen in allen seinen Teilen genau dem Verlauf der elektrischen Feldlinien des Hohlleiters in einem beliebigen Querschnitt. Die tangentiellen Komponenten von  $\mathfrak{E}^{(1)}$  erfahren im Gegensatz zu denen von  $\mathfrak{H}^{(1)}$  in der Dipolebene keinen Sprung.

Die Stromfunktion kann noch mit einer anderen Eigenschaft des Feldes in Verbindung gebracht werden. Nach den Gl. (2,9) sind nämlich die tangentiellen Komponenten von  $\mathfrak{H}^{(1)}$  im ganzen Hohlleiter aus einer Potentialfunktion  $\Psi$  ableitbar, die mit der  $z$ -Komponente  $E$  des Hertzschen Vektors in dem durch Gl. (10,5) an-

$$(10,5) \quad \left\{ \begin{aligned} g^{(m)} \cdot \Psi^{(p,n)}(r, \varphi, z) &= -\frac{\partial E^{(p,n)}}{\partial z} = \mp \frac{i}{a} \cdot \sqrt{a^2 k^2 - j_{np}^2} \\ &\cdot \{ A_{n,p}^{(e)} \cdot \cos n \varphi + B_{n,p}^{(e)} \cdot \sin n \varphi \} \cdot J_n \left( \frac{r}{a} j_{np} \right) \cdot e^{\pm i \cdot \frac{z}{a}} \cdot \sqrt{a^2 k^2 - j_{np}^2} \end{aligned} \right.$$

gegebenen Zusammenhang steht. Schreiben wir speziell in der Ebene  $z = 0$

$$(10,6) \quad \left\{ \begin{aligned} \Psi_0^{(p,n)}(r, \varphi) &= \Psi^{(p,n)}(r, \varphi, 0+) - \Psi^{(p,n)}(r, \varphi, 0-) = -\frac{i}{a \cdot g^{(m)}} \\ &\cdot \sqrt{a^2 k^2 - j_{np}^2} \cdot \{ A_{n,p}^{(e)} \cdot \cos n \varphi + B_{n,p}^{(e)} \cdot \sin n \varphi \} \cdot 2 J_n \left( \frac{r}{a} j_{np} \right), \end{aligned} \right.$$

so ergibt der unmittelbare Vergleich mit (10,4) die Gleichwertigkeit von Potentialfunktion und Stromfunktion:

Nach (10,6) ist nun die Funktion  $\Psi_0^{(p,n)}(r, \varphi)$  gleichbedeutend mit dem Sprung der Funktion  $\Psi^{(p,n)}(r, \varphi, z)$  an der Fläche  $z = 0$ .



Besitzt aber das skalare Potential des magnetischen Feldes in einer Fläche eine Unstetigkeit dieser Art, so ist das ein Kennzeichen dafür, daß in dieser Fläche eine Doppelschicht magnetischer Ladungen liegt. Das Moment dieser Doppelschicht ist dabei durch die Gleichung zu definieren:

$$(10,7) \quad \left\{ \mu \cdot \{ \psi^{(p,n)}(r, \varphi, 0+) - \psi^{(p,n)}(r, \varphi, 0-) \} \equiv \mu \cdot \psi_0^{(p,n)}(r, \varphi) \right. \\ \left. = m_d^{(p,n)}(r, \varphi) \delta_z^+ \right.$$

Die Verteilungsdichte  $m_d(r, \varphi)$  der magnetischen Doppelladung erreicht ihr Maximum am Rande  $r = a$ . Die ihr gleichwertige Wirbelströmung mündet auch hier wieder normal in den Randkreis ein, um dort ihre Fortsetzung in der sich nach rechts und links ausbreitenden Mantelströmung zu finden. Das transversale elektrische Feld des Hohlleiters kann also nach diesen Ausführungen erzeugt gedacht werden durch eine auf der Fläche  $z = 0$  liegende Verteilung magnetischer Doppelladungen oder durch die ihr gleichwertige Wirbelstromschicht. Im Gegensatz zu den Ergebnissen des Abschn. 9 ist es jedoch im jetzigen Falle nicht möglich, für eine vorgegebene Anordnung von Dipolen ohne weiteres eine Angabe über die entsprechende Verteilung von  $m_d$  oder  $J_z$  zu machen. Diese Verteilung wird eben im wesentlichen durch die geometrische Beschaffenheit des Raumes bestimmt, und sie zeigt in dieser Hinsicht ganz die Eigenschaften einer induzierten Verteilung.

#### V. Die scheinbaren Flächenladungen und Flächenströme der axialen elektrischen Dipole in der Dipolebene $z = 0$

11. Die Flächenströme und Flächenladungen des transversalen magnetischen Feldes. Den Untersuchungen über die Flächenströme und Flächenladungen bei den achsensenkrechten Dipolen stellen wir zum Vergleich die analogen Betrachtungen beim axialen Dipol gegenüber. Die Zusammenhänge, die hier aufzudecken sind, muten allerdings beinahe trivial an. Nach der Einleitung befolgt eine beliebige Oberwelle eines transversal magnetischen Feldes, das von einem axialen Dipol herrührt, im allgemeinsten Falle das Gesetz:

$$(11,1) \quad \left\{ \begin{aligned} M_a^{(p,n)} &= \{ A_{n,p} \cdot \cos n\varphi + B_{n,p} \cdot \sin n\varphi \} \\ &\cdot J_n \left( \frac{r}{a} j_{np} \right) \cdot e^{\pm i \cdot \frac{z}{a} \cdot \sqrt{a^2 k^2 - j_{np}^2}} \end{aligned} \right.$$

Hierin hat das doppelte Vorzeichen im Exponenten dieselbe Bedeutung wie bisher, und für einen axialen Dipol an der Stelle  $(\varrho, 0, 0)$  der

Dipolebene  $z = 0$  haben im besonderen die Koeffizienten  $A_{np}$  und  $B_{np}$  in (11,1) die nachstehenden Werte:

$$(11,2) \quad A_{np} = -i \cdot \frac{\partial \mathcal{H}_z}{a} \cdot \gamma_n \cdot \frac{2 J_n \left( \frac{r}{a} j_{np} \right)}{J_n'^2(j_{np})} \cdot (a^2 k^2 - j_{np}^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad B_{np} = 0.$$

Aus den Gl. (2,10) ist dann sofort zu ersehen, daß für ein Feld der Gl. (11,1) sowohl die beiden tangentiellen Komponenten von  $\mathfrak{E}$  als auch die Normalkomponente von  $\mathfrak{E}$  stetig durch die Fläche  $z=0$  gehen. Dagegen erfahren im jetzigen Falle die tangentiellen Komponenten von  $\mathfrak{E}$  daselbst einen Sprung. Dieses Verhalten läßt schließen auf die Existenz eines magnetischen Flächenstroms in der Ebene  $z=0$ . Wir definieren die Komponenten  $g_r$  und  $g_\varphi$  dieses Flächenstroms durch die Gl. (11,3a, b), die ganz ähnlich aufgebaut sind wie die

$$(11,3a) \quad \mathfrak{E}_r(r, \varphi, 0+) - \mathfrak{E}_r(r, \varphi, 0-) = + g_\varphi(r, \varphi),$$

$$(11,3b) \quad \mathfrak{E}_\varphi(r, \varphi, 0+) - \mathfrak{E}_\varphi(r, \varphi, 0-) = - g_r(r, \varphi)$$

Definitionsgleichungen für den elektrischen Flächenstrom. Für das betrachtete Oberfeld  $TM_{np}$  ist dann

$$(11,4a) \quad \left\{ \begin{aligned} g_\varphi^{(p,n)}(r, \varphi) &= + \frac{i}{g^{(e)}} \cdot \frac{j_{np}}{a^2} \cdot \sqrt{a^2 k^2 - j_{np}^2} \\ &\quad \cdot \{A_{np} \cdot \cos n\varphi + B_{np} \cdot \sin n\varphi\} \cdot 2 J_n' \left( \frac{r}{a} j_{np} \right), \end{aligned} \right.$$

$$(11,4b) \quad \left\{ \begin{aligned} g_r^{(p,n)}(r, \varphi) &= + \frac{i}{g^{(e)}} \cdot \frac{j_{np}}{a^2} \cdot \sqrt{a^2 k^2 - j_{np}^2} \\ &\quad \cdot \{A_{np} \cdot \sin n\varphi - B_{np} \cdot \cos n\varphi\} \cdot \frac{2 n}{\frac{j_{np}}{a} \cdot r} \cdot J_n \left( \frac{r}{a} j_{np} \right). \end{aligned} \right.$$

Dieser magnetische Flächenstrom ist demnach quellenfrei, wie es ja auch sein muß, da in der Fläche  $z = 0$  wegen  $\mathfrak{S}_z \equiv 0$  keine magnetischen Ladungen vorhanden sind.

Nun lassen sich nach den Gl. (2,10a, b) in jedem transversal magnetischen Feld die tangentiellen Komponenten  $\mathfrak{E}_r$  und  $\mathfrak{E}_\varphi$  des elektrischen Feldes im ganzen Raum des Hohlleiters aus einer Potentialfunktion  $\Phi(r, \varphi, z)$  ableiten, die mit der  $z$ -Komponente  $M_a$  des Hertzischen Vektors für das Feld  $TM_{np}$  in dem Zusammenhang steht:

$$(11,5) \quad \left\{ \begin{aligned} g^{(e)} \Phi^{(p,n)}(r, \varphi, z) &= - \frac{\partial M_a^{(p,n)}}{\partial z} = \mp \frac{i}{a} \sqrt{a^2 k^2 - j_{np}^2} \\ &\quad \cdot \{A_{np} \cdot \cos n\varphi + B_{np} \cdot \sin n\varphi\} \cdot J_n \left( \frac{r}{a} j_{np} \right) \cdot e^{\pm i \frac{z}{a} \sqrt{a^2 k^2 - j_{np}^2}}. \end{aligned} \right.$$

Setzen wir daher speziell in der Ebene  $z = 0$

$$(11,6) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi_0^{(p,n)}(r, \varphi) &= \Phi^{(p,n)}(r, \varphi, 0+) - \Phi^{(p,n)}(r, \varphi, 0-) \\ &= -\frac{i}{a \cdot g^{(e)}} \sqrt{a^2 k^2 - j_{np}^2} \cdot \{A_{np} \cdot \cos n\varphi + B_{np} \cdot \sin n\varphi\} 2J_n\left(\frac{r}{a} j_{np}\right), \end{aligned} \right.$$

so können die beiden Komponenten (11,4 a, b) des magnetischen Flächenstroms mittels dieser Funktion wie folgt dargestellt werden:

$$(11,7a) \quad g_r^{(p,n)}(r, \varphi) = + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_0^{(p,n)}}{\partial \varphi},$$

$$(11,7b) \quad g_\varphi^{(p,n)}(r, \varphi) = - \frac{\partial \Phi_0^{(p,n)}}{\partial r}.$$

Diese Gleichungen sind identisch mit der  $r$ - und  $\varphi$ -Komponente eines Wirbels, der von einem Vektor mit der einzigen nicht verschwindenden  $z$ -Komponente  $\Phi_0(r, \varphi)$  gebildet wird.

Erfährt nun aber eine Potentialfunktion beim Durchgang durch eine Fläche einen Sprung, wie das bei der Funktion  $\Phi^{(p,n)}(r, \varphi, z)$  nach (11,6) an der Fläche  $z = 0$  der Fall ist, so beweist dieses Verhalten das Vorhandensein einer Doppelschicht elektrischer Ladungen in dieser Fläche. Die Stärke oder das Moment der Doppelschicht ist dabei gemäß der Gl. (11,8) zu definieren.

$$(11,8) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon \cdot [\Phi^{(p,n)}(r, \varphi, 0+) - \Phi^{(p,n)}(r, \varphi, 0-)] &\equiv \varepsilon \cdot \Phi_0^{(p,n)}(r, \varphi) \\ &= -q_d^{(p,n)}(r, \varphi) \cdot \delta z. \end{aligned} \right.$$

Die bisherigen Untersuchungen haben damit zu dem Ergebnis geführt: Das transversal magnetische Feld der Gl. (11,1) eines axialen elektrischen Dipols, dessen gesetzmäßiges Verhalten sich nur durch das Fehlen des doppelten Vorzeichens von dem transversal magnetischen Feld der Gl. (9,1) achsensenkrechter elektrischer Dipole unterscheidet, kann erzeugt gedacht werden durch eine in der Fläche  $z = 0$  sitzende Verteilung elektrischer Doppelladungen mit der Flächendichte  $q_d(r, \varphi) \cdot \delta z$ , deren Verteilungsgesetz für die Oberwelle  $TM_{pn}$  von (11,1) die rechte Seite der Gl. (11,6) beschreibt. Durch das ständige Hin- und Herfluten elektrischer Ladungen zwischen der Vorder- und Hinterseite der Schicht wird in ihr selbst ein magnetischer Flächenstrom mit den Komponenten (11,4 a, b) erzeugt. Die Verteilung der elektrischen Doppelladungen in der Ebene  $z = 0$  erfolgt für jedes Teilfeld in der Weise, daß am Rande des Querschnitts alle Ladungen verschwinden. Ist die Amplitude des Oberfeldes bekannt, so belehren über die zugehörige Ladungsverteilung die Gl. (11,6) und (11,8).

Ist umgekehrt die Verteilung der elektrischen Doppelladungen gegeben, so berechnet sich das Amplitudenspektrum des zugehörigen transversal magnetischen Feldes (11,1) nach der Gl. (11,9). Diese Formel läßt sich auf eben dieselbe Weise gewinnen wie die

$$(11,9) \quad \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} A_{np} \\ B_{np} \end{array} \right\} = - \frac{\gamma_n \cdot \delta_n \cdot \omega}{2 \pi a \cdot J_n'^2(j_{np}) \cdot \sqrt{a^2 k^2 - j_{np}^2}} \\ \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^a q_d(\varrho, \psi) \cdot J_n \left( \frac{\varrho}{a} j_{np} \right) \begin{Bmatrix} \cos n\psi \\ \sin n\psi \end{Bmatrix} \varrho \cdot d\varrho \cdot d\psi \end{cases}$$

frühere Beziehung (9,9). Liegt in der Ebene  $z = 0$  wie in dem in der Einleitung behandelten Falle nur ein einzelner elektrischer Dipol an der Stelle  $(\varrho, 0, 0)$ , so ist in (11,9) offenbar  $\psi = 0$  und  $q_d(\varrho, \psi) \varrho d\varrho \cdot d\psi = +e$  zu setzen, und wegen  $i\omega e = -\mathfrak{J}$  ergeben sich für  $A_{np}$  und  $B_{np}$  auf diese Weise tatsächlich die auf anderem Wege gefundenen Ausdrücke (11,2).

#### VI. Einige Anwendungen auf ringförmige Sender

Die in den Abschn. II und III entwickelten Formeln geben uns die Möglichkeit, auch die Strahlungseigenschaften endlich ausgedehnter linearer Sender zu untersuchen, wofern wir in der Lage sind, einigermaßen zutreffende Angaben über die Stromverteilung in den linearen Leitern des Senders zu machen. Wir erläutern dieses Verfahren an einigen Beispielen, die in der Hauptsache den kreisringförmigen Sender betreffen, der koaxial zum Hohlleiter angeordnet ist. Wir nehmen dabei der Einfachheit halber an, daß  $\varepsilon = \varepsilon_0$  ist.

12,1. *Der kreisförmige Rahmensender mit konstanter Stromamplitude.*  
Das allereinfachste Beispiel dieser Art liefert der kreisförmige Sender vom Radius  $a$ , der von einem über die freie Länge des Ringes nach Größe und Phase konstanten Strom durchflossen wird. Lassen wir zu, daß das Merkmal der Stromkonstanz auch noch bei einer Abweichung der Stromhöhe von 10% von seinem maximalen Wert als erfüllt angesehen werden darf, so muß in Rücksicht auf diese Voraussetzung der Umfang des Ringes  $2\pi a < 0,145 \cdot \lambda$  sein. Die Ausgangsformeln für die Berechnung des Strahlungsfeldes bilden dann im vorliegenden Falle die Gl. (4,3) und (4,4) für die beiden Hertzschen Vektoren eines tangentialen Dipols, und wir haben nur nötig, um von ihnen aus zu den gesuchten Formeln zu gelangen, nach dem Ersatz von  $\varphi$  durch  $\varphi - \psi$  eine Integration über  $\psi$  von  $-\pi$  bis  $+\pi$  durchzuführen. Wie wir schon wissen, verschwindet dabei das transversal magnetische Feld und für das allein übrig bleibende transversal elektrische Feld ergibt sich die Beziehung:

$$(12,1) \left\{ \begin{aligned} E_z(r, \varphi, z) = +i \cdot g^{(m)} \cdot \Im \cdot \rho \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{\rho}{a} j_{1p}\right) J_0\left(\frac{r}{a} j_{1p}\right)}{j_{1p} \cdot J_0^2(j_{1p})} \\ \cdot \frac{e^{\pm i \cdot \frac{z}{a} \cdot \sqrt{a^2 k^2 - j_{1p}^2}}}{\sqrt{a^2 k^2 - j_{1p}^2}} \end{aligned} \right.$$

Hierin ist davon Gebrauch gemacht worden, daß  $j'_{op} = j_{1p}$  ist. Die maximale kritische Wellenlänge des kreisförmigen Senders beträgt demnach

$$\lambda_{10}^{(c)} = \frac{2\pi a}{j_{1p}} = 1,6398 \cdot a \text{ cm.}$$

Bei einer Betriebswellenlänge  $\lambda = 1,5 \cdot a$  cm dürfte also in Rücksicht auf die eingangs angegebene Voraussetzung der Radius des Ringsenders nicht größer gemacht werden als  $0,035 \cdot a$  cm.

11,2. Der kreisförmige Rahmensender mit 2m stehenden Halbwellen. Die Schwierigkeit, die in dem vorigen Beispiel die Voraussetzung der Stromkonstanz mit sich bringt, vermeidet die in Abb. 7

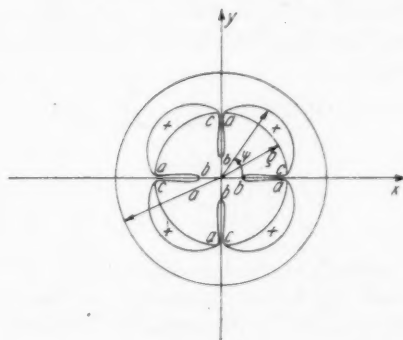


Abb. 7. Der kreisförmige Rahmensender mit den phasenschiebenden Schleifen a, b, c

dargestellte Schaltung einer kreisringförmigen Rahmenantenne, die einer amerikanischen Patentschrift entstammt. In dem in der Abbildung wiedergegebenen Falle liegen auf dem äußeren Umfang des Rahmens vier vollständige positive Halbwellen. Die vier darin eingezeichneten Schleifen a, b, c, sind so angeordnet und bemessen, daß sie gerade die negative Halbwellen des Stroms vollständig aufnehmen können. Da in zwei gegenüberliegenden Punkten dieser Schleifen der Strom die gleiche Größe hat, so darf bei der gewählten Bemessung tat-

sächlich die Wirkung der Schleifen auf das äußere Feld vernachlässigt werden.

Die Formeln für das Strahlungsfeld eines derartigen Ringsenders ergeben sich aus den Gl. (4,3) und (4,4) durch die Berechnung der beiden Integrale:

$$(12,2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ \begin{array}{l} \cos n(\varphi - \psi) \\ \sin n(\varphi - \psi) \end{array} \right\} \cdot |\cos m\psi| \cdot d\psi = 2 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{array} \right\} \\ & \cdot \int_0^\pi \cos n\psi \cdot |\cos m\psi| \cdot d\psi. \end{aligned} \right.$$

Es ist aber für jedes beliebige  $n$  und ein ganzzahliges  $m$ :

$$(12,3) \quad \int_0^\pi \cos n\psi \cdot |\cos m\psi| \cdot d\psi = \frac{m}{m^2 - n^2} \cdot \frac{\sin \pi n}{\sin \left( \frac{\pi n}{2m} \right)} \cdot \cos^2 \left( \frac{n\pi}{2m} \right).$$

Für ein ganzzahliges  $n$  bleibt die rechte Seite nur für  $n = 2m \cdot q$  mit  $q = 0, 1, 2 \dots$  ungleich null, und sie nimmt dafür den Wert  $2 \cdot (-)^q / (1 - 4q^2)$  an. Es gibt daher diesmal auch ein transversal magnetisches Feld. Insbesondere gilt für die  $z$ -Komponente des Hertzschen Vektors, der das transversal elektrische Feld beschreibt, die Beziehung:

$$(12,4) \quad \left\{ \begin{aligned} E_r(r, \varphi, z) &= \frac{2}{\pi} \cdot i g^{(m)} \cdot \Im \cdot \rho \cdot \sum_{n=2mq}^{q=0,1,2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\gamma_n \cdot (-)^q}{4q^2 - 1} \cdot \frac{j'_{np} \cdot \cos n\varphi}{j'^2_{np} - n^2} \\ &\cdot j'_n \left( \frac{\varrho}{a} j'_{np} \right) \cdot \frac{J_n \left( \frac{r}{a} j'_{np} \right)}{J_n^2(j'_{np})} \cdot \frac{e^{\pm i \cdot \frac{z}{a} \cdot \sqrt{a^2 k^2 - j'^2_{np}}} }{\sqrt{a^2 k^2 - j'^2_{np}}} \end{aligned} \right.$$

Wie vorauszusehen war, stehen demnach die Amplituden aller Teilfelder  $TE_{p0}$  bei den beiden besprochenen Arten der Anregung in dem Verhältnis  $\pi:2$ , also in dem gleichen Verhältnis, in dem bei einer reinen Sinuswelle die Amplitude zum Mittelwert der Halbwelle steht. Auch hinsichtlich der kritischen Wellenlänge hat sich gegenüber dem vorigen Beispiel nichts geändert.

11,3. *Der kreisförmige Rahmensender mit durchlaufender Welle.* Im dritten Falle wollen wir annehmen, daß der Ringsender von einer fortschreitenden Welle durchlaufen wird, so daß an der Stelle  $\psi$  die Stromstärke im Ring den Wert  $\Im \cdot \exp(\pm i b \psi)$  hat. Sehen wir von einer Dämpfung ab, so ist die Konstante  $b$  eine reelle Zahl. Die Winkelgeschwindigkeit, mit der die Amplitude umläuft, beträgt  $\dot{\psi} = \frac{\omega}{b}$ .

Um diesen Fall zu erledigen, brauchen wir nur den Wert der Integrale (11,5) und (11,6) zu ermitteln. Die neuen Gleichungen gehen

$$(12,5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{-\pi}^{+\pi} \cos n(\varphi - \psi) e^{\pm i b \psi} d\psi = (\pm)(-)^{n+1} \cdot \sin \pi b \\ & \cdot \left[ \frac{e^{+i n \varphi}}{n \mp b} - \frac{e^{-i n \varphi}}{n \pm b} \right] \quad (n = 0, 1, 2 \dots), \end{aligned} \right.$$

$$(12,6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{-\pi}^{+\pi} \sin n(\varphi - \psi) \cdot e^{\pm i b \psi} \cdot d\psi = (\pm)(-)^n \cdot i \cdot \sin \pi b \\ & \cdot \left[ \frac{e^{+i n \varphi}}{n \mp b} + \frac{e^{-i n \varphi}}{n \pm b} \right] \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \end{aligned} \right.$$

dann aus (4,3) und (4,4) hervor, indem darin  $\partial \mathfrak{H}_i$  durch  $\mathfrak{J} \cdot \frac{e}{4\pi}$  und  $\cos(n\varphi)$ ,  $\sin(n\varphi)$  durch die rechten Seiten der beiden obigen Gleichungen ersetzt werden. Für  $b = 0$  entsteht auf diese Weise wiederum die Gl. (12,1). Weitaus bemerkenswerter ist jedoch der Fall, daß  $b$  einer positiven ganzen Zahl  $m$  gleich wird. Dann sind nämlich für alle  $n \neq m$  die obigen Integrale der Null gleich. Für  $n = m$  aber hat das erste Integral den Wert  $\pi \cdot \exp(\pm i m \varphi)$  und das zweite Integral den Wert  $\mp \pi i \cdot \exp(\pm i m \varphi)$ . Demnach gelten für die Vektorkomponenten des Strahlungsfeldes eines Ringsenders vom Radius  $\rho$ , der von einer nach dem Gesetz  $\exp(i m \varphi)$  fortschreitenden Stromwelle mit der Wellenlänge  $\lambda = \frac{2\pi \rho}{m}$  durchlaufen wird, für alle  $m = 1, 2, 3 \dots$  die folgenden Beziehungen:

$$(12,7) \quad \left\{ \begin{aligned} & M_i(r, q, z) = \mp i \cdot \mathfrak{J} \cdot m \cdot e^{+i m \varphi} \\ & \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_m\left(\frac{\rho}{a} j_{mp}\right) J_m\left(\frac{r}{a} j_{mp}\right)}{j_{mp}^2 \cdot J_m'^2(j_{mp})} \cdot e^{+i \cdot \frac{z}{a} \cdot \sqrt{a^2 k^2 - j_{mp}^2}}, \end{aligned} \right.$$

$$(12,8) \quad \left\{ \begin{aligned} & E_i(r, q, z) = -\pi i \cdot g^{(m)} \cdot \frac{\mathfrak{J} \cdot e}{2\pi} \cdot e^{+i m \varphi} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2 J_m'\left(\frac{\rho}{a} j'_{mp}\right) J_m\left(\frac{r}{a} j'_{mp}\right)}{J_m^2(j'_{mp})} \\ & \cdot \frac{j'_{mp}}{j_{mp}^2 - m^2} \cdot e^{\pm i \cdot \frac{z}{a} \cdot \sqrt{a^2 k^2 - j_{mp}^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 k^2 - j_{mp}^2}}. \end{aligned} \right.$$

Bei der in Rede stehenden Art der Anregung eines Hohlleiterfeldes kommen also wieder beide Transversalfelder zustande, jedoch jeweils nur in einer  $\infty^1$ -fachen Mannigfaltigkeit. Für  $m = 1$  sind für beide Felder die beiden größten kritischen Wellenlängen im

$$TE\text{-Feld} \quad \lambda_{11}^{(e)} = 3,4126 \cdot a \text{ cm}, \quad \lambda_{12}^{(e)} = 2,0572 \cdot a \text{ cm},$$

$$TM\text{-Feld} \quad \lambda_{11}^{(m)} = 1,6398 \cdot a \text{ cm}, \quad \lambda_{12}^{(m)} = 1,2235 \cdot a \text{ cm},$$



Soll sich also nur das zur Wellenlänge  $\lambda_{11}^{(e)}$  gehörende Eigenfeld als Welle im Hohlleiter ausbilden können, so muß die Betriebswellenlänge  $\lambda$  zwischen  $3,413 \cdot a$  und  $2,057 \cdot a$  cm liegen. Ist insbesondere  $\lambda = 3a$  cm, so muß dann  $q = 0,4775 \cdot a$  cm sein.

Der von der Oberwelle des Typus  $p, m$  mitgeführte Energiestrom beträgt in dem Falle, wo die kritische Wellenlänge dieser Teilwelle bereits unterschritten ist, nach den im Anhang angegebenen Formeln für das transversal elektrische Feld

$$(12,9) \quad \left\{ \begin{aligned} S_z^{(p, m)} &= \frac{\pi}{2} \cdot \left( \frac{\mu}{\epsilon} \right)^{1/2} \cdot \mathfrak{J}^2 \cdot \frac{q^2}{a^2} \cdot \frac{j_{mp}'^2 \cdot J_m'^2 \left( \frac{q}{a} j_{mp}' \right)}{(j_{mp}'^2 - m^2) \cdot J_m^2(j_{mp}')} \\ &\quad \cdot \left\{ 1 - \left( \frac{j_{mp}'}{ak} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} W \end{aligned} \right.$$

und für das transversal magnetische Feld

$$(12,10) \quad S_z^{(p, m)} = \frac{\pi}{2} \cdot \left( \frac{\mu}{\epsilon} \right)^{1/2} \cdot \mathfrak{J}^2 \cdot \frac{m^2 \cdot J_m^2 \left( \frac{q}{a} j_{mp}' \right)}{J_m'^2(j_{mp}')} \cdot \left\{ 1 - \left( \frac{j_{mp}'}{ak} \right)^2 \right\}^{1/2} W.$$

Das Auftreten einer transversal magnetischen Welle gemäß (12,7) steht selbst für ein  $b = m$  in keinem Widerspruch zu den Aussagen von Abschn. 9 und insbesondere zur Aussage von Gl. (9,9), denn, wenn es im vorliegenden Falle wie beim Dipol auch keine festen punktförmigen Ladungen in der Fläche  $z = 0$  gibt, so hat man doch offenbar längs des kreisförmigen Leiters selbst mit einer stetigen Verteilung von Quellen zu rechnen. In der Tat beschreibt ja das für die Stromverteilung angenommene Gesetz  $\mathfrak{J} \cdot \exp(im\psi)$  keineswegs eine quellenfreie Strömung, sondern eine Strömung, die an der beliebigen Stelle  $\psi$  eine Quelle der Ergiebigkeit  $im \cdot \mathfrak{J} \cdot \exp(im\psi) \cdot d\psi$  besitzt. Es muß demnach in dem Kreisring  $q$  und  $q + \delta q$  zwischen Ladung und Strom der Zusammenhang bestehen:

$$-i\omega \cdot q(q, \psi) \cdot q \delta q \cdot d\psi + im \cdot \mathfrak{J} \cdot e^{im\psi} \cdot d\psi = 0.$$

Geht man mit dieser Beziehung in die Gl. (9,9) ein und beachtet dazu die Gl. (9,1), so gelangt man auch auf diesem Wege zur Formel (12,8) zurück.

Selbstverständlich läßt sich mit einer stehenden Welle im Ringsender in bezug auf die Auswahl der Wellentypen dieselbe Wirkung erzielen. Da eine stehende Welle stets aus zwei gegenläufigen Wellen halber Amplitude entstanden gedacht werden kann, so gelten bei Erregung durch eine stehende Welle, die das Gesetz

$\Im \cdot \cos(m\psi)$  befolgt, für  $E$  und  $M$  dieselben Gleichungen wie oben mit dem einzigen Unterschied, daß der Faktor  $\exp(i m \varphi)$  in (11,7) durch  $i \cdot \sin(m\varphi)$  und in (11,8) durch  $\cos(m\varphi)$  ersetzt werden muß.

### Mathematischer Anhang

1. Das Ausgangsintegral für  $\exp \frac{(i k R)}{R}$ . Für ein  $R = (a^2 + z^2)^{1/2}$  gilt nach Campbell-Foster<sup>9)</sup> oder nach Weyrich<sup>1)</sup> in etwas anderer Schreibweise die Darstellung:

$$(1,1) \quad \frac{e^{i k R}}{R} = \frac{i}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(1)}(i \sqrt{u^2 - k^2} \cdot a) \cdot e^{i \cdot u z} \cdot du.$$

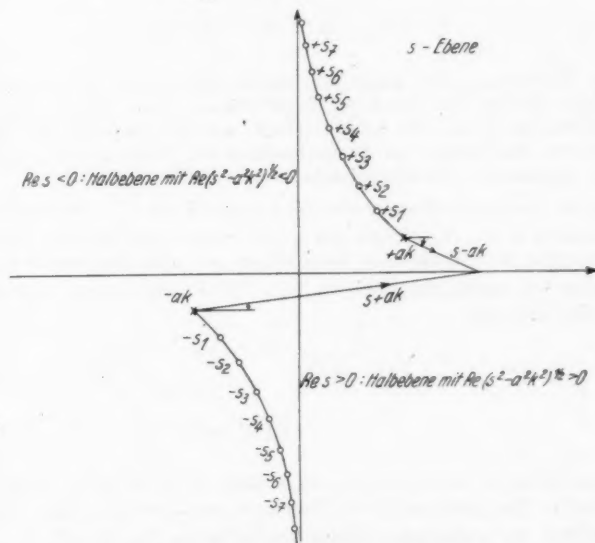


Abb. 8. Die Phasenlage von  $s \pm ak$  in Gl. (1,4)

und die Lage der Wurzeln  $s = \pm s_p$  oder  $s = \pm s_p'$  in der  $s$ -Ebene

Hierin ist das Vorzeichen der Quadratwurzel so zu wählen, daß für ein  $u \rightarrow \infty \arccos(u^2 - k^2)^{1/2} = 0$  ist. Im übrigen sind für ein  $\Im m(k) > 0$  die Phasenwinkel der beiden Faktoren  $u - k$  und  $u + k$  des Radikanden längs des Integrationsweges im Sinne von Abb. 8 zu nehmen.

In einem Zylinderkoordinatensystem ist nun der Abstand  $R$  der beiden Punkte  $(\varrho, 0, 0)$  und  $(r, z)$  durch den Ausdruck gegeben:

$$(1,2) \quad R^2 = s^2 + r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cdot \cos \varphi.$$

Andererseits ist nach dem Additionstheorem der Zylinderfunktionen

$$(1,3) \quad H_0^{(1)}(\alpha \sqrt{r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cdot \cos \varphi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cdot \cos n \varphi \cdot J_n(\alpha \varrho) H_n^{(1)}(\alpha r) \quad (r > \varrho)$$

und hierin hat man  $r$  mit  $q$  zu vertauschen, falls  $r < q$  ist. Die Reihe (1,3) ist absolut konvergent für alle  $q < r$ .

Identifiziert man nun in (1,1) den Faktor  $a$  mit  $(r^2 + q^2 - 2r \cdot q \cdot \cos \varphi)^{1/2}$  und berücksichtigt die Reihe (1,3), so erhält man nach dem Ersatz von  $a$  durch  $\frac{s}{R}$  für  $\exp \frac{(i k R)}{R}$  die Formel:

$$(1,4) \quad \frac{e^{i k R}}{R} = \frac{i}{2a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cdot \cos n \varphi \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} J_n(s_q) H_n^{(1)}(s_r) \cdot e^{i \cdot \frac{s z}{a}} \cdot ds \quad (r > q).$$

In ihr steht zur Abkürzung

$$(1,4a) \quad s_r = i \cdot \frac{r}{a} \cdot \sqrt{s^2 - a^2 k^2}.$$

Die Einführung des Faktors  $a$  in die Gl. (1,4) ist eine ganz willkürliche Maßnahme, die jederzeit durch die Substitution  $s = a \cdot t$  wieder rückgängig gemacht werden kann. Sie ist nur erfolgt, um eine bessere Anpassung der Schreibweise des Integrals an die Rechnungen des Textes zu ermöglichen und um den Integranden von dimensionsbehafteten Größen zu befreien.

2. Der funktionale Charakter der vier Hilfsfunktionen  $F_r^{(e)}$ ,  $F_r^{(m)}$  und  $F_q^{(k)}$ ,  $F_q^{(m)}$  der Abschnitte I und II. Wegen des untereinander sehr ähnlichen Aufbaues der genannten vier Funktionen beschäftigen wir uns eingehender nur mit der ersten von ihnen, der Funktion  $F_r^{(e)}$ . Sie ist nach dem Text definiert durch die Gleichung:

$$(2,1) \quad \left\{ F_r^{(e)} \left( n; \frac{q}{a}, \frac{r}{a}; \sqrt{s^2 - a^2 k^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{s^2 - a^2 k^2}} \cdot \frac{J'_n(s_q)}{J'_n(s_a)} \right. \\ \left. \cdot \{ H_n^{(1)}(s_r) J'_n(s_a) - H_n^{(1)'}(s_a) J_n(s_r) \} \right.$$

An dieser Funktion interessiert in erster Linie ihr funktionales Verhalten in bezug auf  $s$ . Im Vordergrund des Interesses steht dabei die Frage nach der Eindeutigkeit, die anscheinend infolge des Auftretens der Wurzel  $(s^2 - a^2 k^2)^{1/2}$  in Zweifel zu ziehen ist. Wir entscheiden diese Frage, indem wir in Gedanken um einen der beiden Verzweigungspunkte der Wurzel einen Umlauf

im mathematisch positiven Sinne ausführen. Der Faktor  $(s^2 - a^2 k^2)^{-1/2}$  multipliziert sich dabei mit  $\exp(-\pi i)$ . Hingegen ändert sich der Wert des

Quotienten  $\frac{J'_n(s_q)}{J'_n(s_a)}$  durch diesen Umlauf nicht. Für den Ausdruck in der ge-

schweiften Klammer von (2,1) läßt sich die Frage bereits in ausreichendem Umfange mittels der Umlaufrelationen der Zylinderfunktionen entscheiden. Man ersieht aber noch mehr aus der Gl. (2,2), die ohne Schwierigkeit aus den in einer Arbeit des Verf.<sup>3)</sup> angeführten Formeln hergeleitet werden kann. Dieser Gleichung zufolge multipliziert sich beim Übergang von  $z$  zu  $z \cdot \exp(+\pi i)$  das zweite Glied der rechten Seite mit  $\exp(-\pi i)$  und das erste Glied mit  $\exp(+\pi i)$ . Außerdem läßt sich der Beziehung (2,2) noch entnehmen, daß

$$(2,2) \quad \left\{ \begin{aligned} H_n^{(1)}(rz) J_n'(az) - H_n^{(1)'}(az) J_n(rz) = & - \frac{i}{(\pi az)} \cdot \left\{ \left( \frac{a}{r} \right)^n + \left( \frac{r}{a} \right)^n \right\} \\ & + \ln \left( \frac{a}{r} \right) \\ & + \frac{i}{\pi} \cdot \int e^{+n\Phi} \cdot J_1(z w_\Phi) \cdot \frac{a-r \operatorname{Im} \Phi}{w_\Phi} \cdot d\Phi \\ & - \ln \left( \frac{a}{r} \right) \\ & \cdot (w_\Phi = a^2 + r^2 - 2ar \cdot \operatorname{Im} \Phi) \end{aligned} \right.$$

die Vieldeutigkeit der Hankelschen Funktion selbst innerhalb des links stehenden Ausdrucks nicht zur Geltung kommt. Im ganzen besteht also für die Funktion  $F_\tau^{(e)}$  die folgende Umlaufrelation:

$$(2,3) \quad F_\tau^{(e)} \left( n; \frac{\varrho}{a}, \frac{r}{a}; \sqrt{s^2 - a^2 k^2} \cdot e^{+\pi i} \right) = F_\tau^{(e)} \left( n; \frac{\varrho}{a}, \frac{r}{a}; \sqrt{s^2 - a^2 k^2} \right).$$

Auch das wertmäßige Verhalten der Funktion  $F_\tau^{(e)}$  in der unmittelbaren Umgebung der beiden Punkte  $\pm ak$  ist aus (2,2) zu ersehen. Nach Gl. (2,1) und (2,2) ist nämlich für  $s = \pm ak + s$

$$(2,4) \quad \left\{ \begin{aligned} F_\tau^{(e)} \left( n; \frac{\varrho}{a}, \frac{r}{a}; \sqrt{s^2 - a^2 k^2} \right) \approx \mp \frac{\left( \frac{\varrho}{a} \right)^{n-1}}{\pi \cdot 2ak \cdot s} \cdot \left[ \left( \frac{a}{r} \right)^n + \left( \frac{r}{a} \right)^n \right] \\ (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right.$$

Die Funktion  $F_\tau^{(e)}$  besitzt also an den beiden Stellen  $s = \pm ak$  je einen einfachen Pol. Sie besitzt aber auch noch einfache Pole an den Nullstellen  $j'_{np}$  der Besselschen Funktion  $J'_n(x) = 0$ , die mit  $p = 1, 2, 3, \dots$  in unendlicher Zahl auftreten. Diese Pole liegen in der  $s$ -Ebene an den Stellen

$$\pm s'_p = \pm (a^2 k^2 - j_{np}'^2)^{1/2},$$

also je nach dem Vorzeichen in der oberen oder unteren Halbebene. Ihre ungefähre Lage ist in Abb. 8 schematisch eingezeichnet. Ist  $ak$  rein reell, so kommen alle diejenigen Wurzeln, für die  $j'_{np} < ak$  ist, auf die reelle Achse der  $s$ -Ebene zu liegen. Ist unter derselben Voraussetzung  $j'_{np} > ak$ , so ist dann offenbar zu ersetzen

$$\sqrt{a^2 k^2 - j_{np}'^2} = +i \cdot \sqrt{j_{np}'^2 - a^2 k^2}.$$

In der Umgebung jedes der Pole  $s = \pm s'_p$  ist mit  $s = \pm s'_p + s$

$$(2,5a) \quad J'_n(s_\alpha) \approx \pm \frac{j_{np}'^2 - n^2}{j_{np}'^3} \cdot \sqrt{a^2 k^2 - j_{np}'^2} \cdot J_n(j'_{np}) \cdot s + O(s^2),$$

$$(2,5b) \quad H_n^{(1)}(s_r) J'_n(s_\alpha) - H_n^{(1)'}(s_\alpha) J_n(s_r) \approx - \frac{2i}{\pi j_{np}'^2} \cdot \frac{J_n \left( \frac{r}{a} j'_{np} \right)}{J_n(j'_{np})} + O(s).$$

Schließlich muß noch das Verhalten der Funktion  $F_\tau^{(e)}$  in den sehr weit entfernten Teilen der  $s$ -Ebene bekannt sein. Darüber ergibt sich alles Wissens-

werte aus den asymptotischen Darstellungen der Zylinderfunktionen. Sie führen zu der folgenden Angabe: Für  $s \rightarrow \infty$  ist für jedes  $|\arg s| \leq \pi$  und für alle  $r > q$ :

$$(2,6) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{\tau}^{(e)} \left( n; \frac{q}{a}, \frac{r}{a}; \sqrt{s^2 - a^2 k^2} \right) \sim -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{a}{\sqrt{r q}} \\ \cdot \frac{\Im \left[ \left( \frac{a-r}{a} \sqrt{s^2 - a^2 k^2} \right) \right]}{s^2 - a^2 k^2} \cdot \frac{\Im \left[ \left( \frac{q}{a} \sqrt{s^2 - a^2 k^2} + \frac{2n-1}{4} \pi i \right) \right]}{\Im \left[ \left( \sqrt{s^2 - a^2 k^2} + \frac{2n-1}{4} \pi i \right) \right]} \end{array} \right.$$

Für ein  $\Re[(s^2 - a^2 k^2)^{1/2}] \geq 0$  verschwindet also  $F_{\tau}^{(e)}$  wesentlich wie die Funktion  $\exp\left(-\frac{(r-q)}{a} \cdot |s|\right)$ . Ist aber  $(s^2 - a^2 k^2)^{1/2}$  rein imaginär, so verschwindet sie immer noch wie  $|s|^{-2}$ , solange  $s$  einen genügend großen Abstand von den weit entfernten Polen  $\pm i \cdot j'_{np}$  der Funktion  $F_{\tau}^{(e)}$  hat. Aus dem Ausdruck (2,6) ist im übrigen sofort zu ersehen, welchen Werten sich die Wurzeln  $j'_{np}$  für sehr große  $p$  nähern.

Außerhalb der erwähnten singulären Stellen, zu denen der unendlichen Polkette wegen als Häufungspunkt auch der unendlich ferne Punkt der  $s$ -Ebene selbst gehört, ist die Funktion  $F_{\tau}^{(e)}$  regulär und analytisch. Sie hat also den Charakter einer meromorphen Funktion.

In ganz ähnlicher Weise läßt sich das Verhalten der übrigen drei Hilfsfunktionen untersuchen. Da deren Eigenschaften Schritt für Schritt durch die gleichen Überlegungen festgestellt werden können, so beschränken wir uns bei ihnen darauf, sie lediglich durch die entsprechenden Formeln zu beschreiben. Nach (Gl. I, 3,4) ist die Funktion  $F_{\tau}^{(m)}$  definiert durch die Beziehung:

$$(2,7) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{\tau}^{(m)} \left( n; \frac{q}{a}, \frac{r}{a}; \sqrt{s^2 - a^2 k^2} \right) = -\frac{s}{s^2 - a^2 k^2} \cdot \frac{J_n(s_q)}{J_n(s_a)} \\ \cdot \{ H_n^{(1)}(s_r) J_n(s_a) - H_n^{(1)}(s_a) J_n(s_r) \}. \end{array} \right.$$

Nach der schon oben zitierten Arbeit des Verf. ist aber mit derselben Definitionsgleichung für  $w_{\phi}$  wie in (2,2):

$$(2,8) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_n^{(1)}(r z) J_n(a z) - H_n^{(1)}(a z) J_n(r z) = -\frac{i}{\pi} \cdot \int_{-\ln\left(\frac{a}{r}\right)}^{+\ln\left(\frac{a}{r}\right)} e^{+n \cdot \Phi} \cdot J_0(z w_{\phi}) \cdot d\Phi. \end{array} \right.$$

Daraus kann einmal geschlossen werden, daß auch die Funktion  $F_{\tau}^{(m)}$  gemäß Gl. (2,9) innerhalb der ganzen  $s$ -Ebene eine eindeutige Funktion ist. Außerdem

$$(2,9) \quad F_{\tau}^{(m)} \left( n; \frac{q}{a}, \frac{r}{a}; \sqrt{s^2 - a^2 k^2} \cdot e^{\pm \pi i} \right) = F_{\tau}^{(m)} \left( n; \frac{q}{a}, \frac{r}{a}; \sqrt{s^2 - a^2 k^2} \right).$$

folgt aus (2,8), daß sich die Funktion  $F_{\tau}^{(m)}$  in der Umgebung der Pole  $s = \pm a k$  gemäß der Formel (2,10) verhält.

$$(2,10) \quad \left\{ \begin{aligned} F_{\varepsilon}^{(m)} \left( n; \frac{q}{a}, \frac{r}{a}; \sqrt{s^2 - a^2 k^2} \right) \\ \approx -\frac{i}{2\pi n} \cdot \varepsilon^{-1} \left( \frac{q}{a} \right)^n \cdot \left[ \left( \frac{a}{r} \right)^n - \left( \frac{r}{a} \right)^n \right] \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \\ \approx -\frac{i}{\pi} \cdot \varepsilon^{-1} \cdot \ln \left( \frac{a}{r} \right) \quad (n = 0). \end{aligned} \right.$$

Neben den Polen  $s = \pm ak$  besitzt die Funktion  $F_{\varepsilon}^{(m)}$  eine unendliche Kette einfacher Pole in den Punkten  $s = \pm s_p = \pm (a^2 k^2 - j_{np}^2)^{1/2}$ , und in der Umgebung  $s = \pm s_p + \varepsilon$  dieser Pole ist

$$(2,11a) \quad J_n(s_a) \approx \mp \frac{\sqrt{a^2 k^2 - j_{np}^2}}{j_{np}} \cdot J'_n(j_{np}) \cdot \varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

$$(2,11b) \quad H_n^{(1)}(s_r) J_n(s_a) - H_n^{(1)}(s_a) J_n(s_r) \approx \frac{2i}{\pi j_{np}} \cdot \frac{J_n\left(\frac{r}{a} j_{np}\right)}{J'_n(j_{np})} + O(\varepsilon).$$

Schließlich haben wir in den weit entfernten Teilen der  $s$ -Ebene für die Funktion  $F_{\varepsilon}^{(m)}$ , falls  $r > q$  ist, die asymptotische Darstellung:

$$(2,12) \quad \left\{ \begin{aligned} F_{\varepsilon}^{(m)} \left( n; \frac{q}{a}, \frac{r}{a}; \sqrt{s^2 - a^2 k^2} \right) &\sim -\frac{2i}{\pi} \cdot \frac{a}{\sqrt{r q}} \\ &\cdot \frac{s \cdot \operatorname{Si} \left( \frac{a-r}{a} \sqrt{s^2 - a^2 k^2} \right)}{\sqrt{s^2 - a^2 k^2}^3} \cdot \frac{\operatorname{Co} \left[ \left( \frac{q}{a} \sqrt{s^2 - a^2 k^2} + \frac{2n+1}{4} \pi i \right) \right]}{\operatorname{Co} \left[ \left( \sqrt{s^2 - a^2 k^2} + \frac{2n+1}{4} \pi i \right) \right]}. \end{aligned} \right.$$

In dem asymptotischen Verhalten der beiden Funktionen  $F_{\varepsilon}^{(e)}$  und  $F_{\varepsilon}^{(m)}$  besteht also kein wesentlicher Unterschied.

Für die beiden letzten noch ausstehenden Hilfsfunktionen lauten gemäß dem Text die Definitionsgleichungen wie folgt:

$$(2,13) \quad \left\{ \begin{aligned} F_{\varepsilon}^{(e)} \left( n; \frac{q}{a}, \frac{r}{a}; \sqrt{s^2 - a^2 k^2} \right) &= \frac{1}{s^2 - a^2 k^2} \cdot \frac{J_n(s_q)}{J'_n(s_a)} \\ &\cdot \{ H_n^{(1)}(s_r) J'_n(s_a) - H_n^{(1)'}(s_a) J_n(s_r) \}, \end{aligned} \right.$$

$$(2,14) \quad \left\{ \begin{aligned} F_{\varepsilon}^{(m)} \left( n; \frac{q}{a}, \frac{r}{a}; \sqrt{s^2 - a^2 k^2} \right) &= \frac{s}{\sqrt{s^2 - a^2 k^2}} \cdot \frac{J'_n(s_q)}{J_n(s_a)} \\ &\cdot \{ H_n^{(1)}(s_r) J_n(s_a) - H_n^{(1)}(s_a) J_n(s_r) \}. \end{aligned} \right.$$

Auf Grund der gleichen Überlegungen wie im Anschluß an die Gl. (2,1) und (2,7) kann man auch für diese beiden Funktionen leicht zeigen, daß für sie Umlaufrelationen nach Art der Gl. (2,1) und (2,7) gelten, so daß sie mithin eindeutige Funktionen der Veränderlichen  $s$  darstellen. Die Funktion  $F_{\varepsilon}^{(e)}$  hat an den Stellen  $s = \pm ak$  und  $s = \pm s'_p$  die gleichen einfachen

Pole wie die Funktion  $F_r^{(e)}$  und ebenso besitzen auch die Funktionen  $F_r^{(a)}$  und  $F_\varrho^{(m)}$  in den Punkten  $s = \pm ak$  und  $s = \pm s_p$  gemeinsame Pole erster Ordnung. Im besonderen gelten in der Umgebung der Punkte  $s = \pm ak$  mit  $s = \pm ak + \varepsilon$  für die beiden Funktionen  $F_\varrho^{(e)}$  und  $F_\varrho^{(m)}$  die folgenden Darstellungen:

$$(2,15 a) \quad \left\{ \begin{aligned} F_\varrho^{(e)}\left(n; \frac{\varrho}{a}, \frac{r}{a}; \sqrt{s^2 - a^2 k^2}\right) &\approx \mp \frac{i}{\pi n} \cdot \varepsilon^{-1} \cdot \left(\frac{\varrho}{a}\right)^n \cdot \left[\left(\frac{a}{r}\right)^n + \left(\frac{r}{a}\right)^n\right] \quad (n=1,2,\dots) \end{aligned} \right.$$

$$(2,15 b) \quad \left\{ \begin{aligned} F_\varrho^{(m)}\left(n; \frac{\varrho}{a}, \frac{r}{a}; \sqrt{s^2 - a^2 k^2}\right) &\approx -\frac{1}{2\pi} \cdot \varepsilon^{-1} \cdot \left(\frac{\varrho}{a}\right)^{n-1} \left[\left(\frac{a}{r}\right)^n - \left(\frac{r}{a}\right)^n\right] \quad (n=1,2,3,\dots) \end{aligned} \right.$$

In der Umgebung des unendlich fernen Punktes der  $s$ -Ebene bestehen für sie die beiden Entwicklungen:

$$(2,16 a) \quad \left\{ \begin{aligned} F_\varrho^{(e)}\left(n; \frac{\varrho}{a}, \frac{r}{a}; \sqrt{s^2 - a^2 k^2}\right) &\sim -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{a}{\sqrt{r\varrho}} \cdot \frac{\operatorname{Coj}\left(\frac{a-r}{a} \sqrt{s^2 - a^2 k^2}\right)}{\sqrt{s^2 - a^2 k^2}} \cdot \frac{\operatorname{Coj}\left(\frac{\varrho}{a} \sqrt{s^2 - a^2 k^2} + \frac{2n+1}{4} \pi i\right)}{\operatorname{Coj}\left(\sqrt{s^2 - a^2 k^2} + \frac{2n-1}{4} \pi i\right)} \end{aligned} \right.$$

$$(2,16 b) \quad \left\{ \begin{aligned} F_\varrho^{(m)}\left(n; \frac{\varrho}{a}, \frac{r}{a}; \sqrt{s^2 - a^2 k^2}\right) &\sim -\frac{2i}{\pi} \cdot \frac{a}{\sqrt{r\varrho}} \cdot s \cdot \frac{\operatorname{Sin}\left(\frac{a-r}{a} \sqrt{s^2 - a^2 k^2}\right)}{s^2 - a^2 k^2} \cdot \frac{\operatorname{Coj}\left(\frac{\varrho}{a} \sqrt{s^2 - a^2 k^2} + \frac{2n-1}{4} \pi i\right)}{\operatorname{Coj}\left(\sqrt{s^2 - a^2 k^2} + \frac{2n+1}{4} \pi i\right)} \end{aligned} \right.$$

Wir können damit für unsere Zwecke die Untersuchungen über den analytischen Charakter der vier Hilfsfunktionen der Abschnitte I und II abschließen.

3. Die Formeln für die axiale Impedanz und den Energiestrom transversal elektrischer und magnetischer Wellen. Bei einer beliebigen Oberwelle der Ordnung  $p, n$  lautet die Beziehung für die  $z$ -Komponente des zugehörigen Hertzischen Vektors in ihrer allgemeinsten Form im Falle der transversal elektrischen Welle

$$(3,1) \quad E^{(p,n)} = A_{n,p} \cdot \left\{ \begin{aligned} &\cos n\varphi \\ &\sin n\varphi \end{aligned} \right\} \cdot J_n\left(\frac{r}{a} j_{n,p}\right) \cdot e^{\pm i \cdot \frac{\pi}{a} \cdot \sqrt{a^2 k^2 - j_{n,p}^2}} \quad [A_{n,p}] = V,$$

transversal magnetischen Welle

$$(3,2) \quad M^{(p,n)} = B_{n,p} \cdot \left\{ \begin{aligned} &\cos n\varphi \\ &\sin n\varphi \end{aligned} \right\} \cdot J_n\left(\frac{r}{a} j_{n,p}\right) \cdot e^{\pm i \cdot \frac{\pi}{a} \cdot \sqrt{a^2 k^2 - j_{n,p}^2}} \quad [B_{n,p}] = A.$$



Mittels dieser Gleichungen und der Gl. (2,9) und (2,10) berechnen sich sofort für die axiale Impedanz dieser beiden Wellentypen die folgenden Ausdrücke: Es ist für die

transversal elektrische Welle

$$(3,3a) \quad \hat{\beta}_{p,n}^{(e)} = \frac{\mathcal{E}_r^{(1)}}{\mathcal{H}_\varphi^{(1)}} = - \frac{\mathcal{E}_\varphi^{(1)}}{\mathcal{H}_r^{(1)}} = \pm \left( \frac{\mu}{\epsilon} \right)^{1/2} \cdot \left\{ 1 - \left( \frac{j'_{np}}{ak} \right)^2 \right\}^{-1/2},$$

transversal magnetische Welle

$$(3,3b) \quad \hat{\beta}_{p,n}^{(m)} = \frac{\mathcal{E}_r^{(2)}}{\mathcal{H}_\varphi^{(2)}} = - \frac{\mathcal{E}_\varphi^{(2)}}{\mathcal{H}_r^{(2)}} = \pm \left( \frac{\mu}{\epsilon} \right)^{1/2} \cdot \left\{ 1 - \left( \frac{j_{np}}{ak} \right)^2 \right\}^{-1/2}.$$

Hierin gilt das positive Vorzeichen für die in Richtung zunehmender Werte von  $z$  fortschreitende Welle und das negative Vorzeichen im anderen Falle. Die axiale Impedanz ist also oberhalb der kritischen Frequenz stets ein Widerstand, der mit zunehmender Frequenz mehr und mehr gegen den Wert  $120 \cdot \pi$  Ohm geht.

Der zeitliche Mittelwert des Energiestromes durch den gesamten Querschnitt des Hohlleiters berechnet sich allgemein aus der Gleichung:

$$(3,4) \quad S_z = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^a \{ \mathcal{E}_r \mathcal{H}_\varphi - \mathcal{E}_\varphi \mathcal{H}_r \} \cdot r \, dr \cdot d\varphi.$$

Es ist aber andererseits:

$$(3,5a) \quad \int_0^{j'_{np}} \left\{ \frac{n^2}{x^2} \cdot J_n^2(x) + J_n'^2(x) \right\} \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot J_n^2(j'_{np}) \cdot [j_{np}'^2 - n^2],$$

$$(3,5b) \quad \int_0^{j_{np}} \left\{ \frac{n^2}{x^2} \cdot J_n^2(x) + J_n'^2(x) \right\} \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot j_{np}^2 \cdot J_n'^2(j_{np}).$$

Geht man mit den Gl. (3,1) und (3,2) in die Beziehung für  $\gamma_z$  ein und beachtet die beiden soeben angegebenen Formeln, so ergeben sich oberhalb der kritischen Frequenz für den einseitigen Energiestrom die beiden folgenden Ausdrücke: Bei einer

transversal elektrischen Welle ist

$$(3,6a) \quad S_z^{(e,p,n)} = \frac{\pi}{4} \cdot |A_{n,p}|^2 \cdot \frac{j_{np}'^2 - n^2}{\hat{\beta}_{p,n}^{(e)}} \cdot J_n^2(j'_{np}) \quad W,$$

transversal magnetischen Welle

$$(3,6b) \quad S_z^{(m,p,n)} = \frac{\pi}{4} \cdot |B_{n,p}|^2 \cdot \hat{\beta}_{p,n}^{(m)} \cdot j_{np}^2 \cdot J_n'^2(j_{np}) \quad W.$$

Bildet man die Gl. (3,4) aus Teilwellen verschiedener Ordnung in  $n$  oder  $p$ , so zeigt sich, daß der Energiestrom stets verschwindet, und zwar auch dann, wenn man Teilwellen aus verschiedenen Strahlungsfeldern miteinander kombiniert.

Die beiden unendlichen Reihen von Eigenfunktionen, die die Teilfelder eines transversal elektrischen und magnetischen Feldes beschreiben, bilden also ein biorthogonales System.

Wegen weiterer typischer Eigenschaften der transversal elektrischen und magnetischen Wellen vgl. man die unter <sup>6)</sup> zitierte Arbeit.

#### Literaturzusammenstellung

- 1) R. Weyrich, Journ. f. reine und angew. Mathematik **172**. S. 133 bis 150. 1934.
  - 2) Riemann-Weber-v. Mises, Die Differentialgleichungen der Physik, Braunschweig. S. 563 ff. 1927.
  - 3) H. Buchholz, Phil. Mag., Ser. 7. **27**. S. 407. 1939.
  - 4) J. R. Carson, S. P. Mead u. S. A. Schelkunoff, Bell System techn. Journ. **16**. S. 310—333. 1937.
  - 5) H. Buchholz, ENT **15**. S. 297—320. 1938.
  - 6) S. A. Schelkunoff, Proc. Inst. Rad. Eng. **25**. S. 1457—1492. 1937.
  - 7) H. Buchholz, Jahrbuch der AEG-Forschung **7**. S. 137. 1940.
  - 8) G. A. Campbell-R. M. Foster, Bell Telephone System. S. 125. 1931.
- Berlin, Urbanstr. 126.

(Eingegangen 17. Dezember 1940)

#### Berichtigung zur Arbeit: Über die wahre Linienbreite und Oszillatorenstärke der Linien des Europiumsulfats Von G. Joos und K. H. Hellwege

In der Arbeit „Über die wahre Linienbreite und Oszillatorenstärke der Linien des Europiumsulfats“ von G. Joos und K. H. Hellwege, Ann. d. Phys. [5] **39**. H. 1. 1941. S. 28 muß in Tab. 1 die Bezeichnung des Grundterms überall  ${}^1F_0$  statt  ${}^1S_0$  heißen. Außerdem ist bei der Beschriftung von Abb. 1, S. 26,  ${}^1F_0$  statt  ${}^1F$  zu setzen.

Göttingen, II. Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 13. Februar 1941)

## **Eine Methode zur Erzeugung von Heliumtemperaturen ohne Benutzung von flüssigem Wasserstoff<sup>1)</sup>**

**Von Karl Seiler**

(Mit 20 Abbildungen)

Inhalt: Einleitung. — § 1. Kälteleistung und Kältebedarf. — § 2. Der Wärmeaustausch. — § 3. Der apparative Aufbau. — § 4. Meßergebnisse. — § 5. Die Kreislaufapparatur. — § 6. Diskussion der Meßergebnisse. — § 7. Schlußbemerkungen. — Zusammenfassung.

### **Einleitung**

(Übersicht über bekannte Verfahren, Ziel dieser Arbeit)

Die Erzeugung von Temperaturen des siedenden Heliums stößt auf nicht unerhebliche Schwierigkeiten, was schon die Tatsache zeigt, daß nur an wenigen Stellen der Erde diese Temperaturen zur Verfügung stehen. Die Abkühlung des Heliums geschieht meist mit Hilfe der adiabatischen Drosselung nach Joule und Thomson. Da die Inversionstemperatur von Helium etwa  $40^{\circ}$  K beträgt, ist zur Verflüssigung von Helium die vorherige Verflüssigung von Wasserstoff erforderlich. Die gesamten Anlagen hierzu sind so umfangreich, daß sie von vornherein Tieftemperaturuntersuchungen für viele wissenschaftliche Forschungsstätten unmöglich machen. Die Kostspieligkeit der Apparate ist auch der Grund, daß die Physik der tiefsten Temperaturen, insbesondere die mannigfachen Erscheinungen der Supraleitung, noch keinen Eingang in die Hörsäle finden konnten. Selbstverständlich ist die Errichtung umfangreicher Verflüssigungsanlagen zu einer gelegentlichen Benutzung in jeder Hinsicht unökonomisch. Andererseits bietet aber in vielen Fällen die Tieftemperaturuntersuchung eine so grundsätzliche Variation der Versuchsbedingungen, daß sie nur ungern entbehrt wird.

Das vor allem in Leiden entwickelte Verfahren zur Erzeugung von Heliumtemperaturen besteht in Anlehnung an die Experimente bei flüssiger Luft und flüssigem Wasserstoff darin, daß in größeren Verflüssigungsapparaten, ausgehend von flüssigem Stickstoff und

1) Breslauer Habilitationsschrift.

flüssigem Wasserstoff, flüssiges Helium — explizit — erzeugt, und mittels besonderer Vorrichtungen in das Untersuchungsgefäß gehiebert wird. Der Vorteil dieser Methode ist unverkennbar der verhältnismäßig einfache Aufbau der Untersuchungsapparatur, was sich besonders bei Reihenuntersuchungen in der leichten Austauschbarkeit der Proben zeigt. Nachteilig ist der große Umfang der Verflüssigungsanlage und die verhältnismäßig große Menge benötigten Heliums.

Simon hat, ausgehend von flüssigem Wasserstoff, zwei Methoden angegeben, die die explizite Verflüssigung von Helium vermeiden. Bei beiden Verfahren sind Versuchsapparatur und Kälteerzeuger wärmeleitend miteinander verbunden. Die Expansionsmethode<sup>1)</sup> besteht darin, daß man Helium, das bei hohem Druck und etwa der Temperatur des festen Wasserstoffs in einem Hohlgefäß eingeschlossen ist, adiabatisch expandieren läßt. Die Wärmekapazität des Druckbehälters einschließlich der abzukühlenden Proben ist sehr klein im Vergleich zu der des Heliums, so daß schon geringe Mengen flüssigen Heliums zur weiteren Temperaturerniedrigung völlig ausreichen. Durch Abpumpen des siedenden Heliums läßt sich leicht eine Temperatur von etwa  $2^{\circ}$  K erreichen. Der apparative Aufbau und das Arbeiten mit dieser Methode ist einfach und zuverlässig. Bei der Desorptionsmethode<sup>2)</sup> adsorbiert man Helium an Kohle bei der Temperatur des abgepumpten Wasserstoffs, isoliert den Kohlebehälter und läßt das Helium wieder desorbieren. Die Desorption ist mit einer Pumpe noch zu unterstützen. Erwähnenswert ist in diesem Zusammenhang eine Type eines Heliumkryostaten von Daunt und Mendelssohn<sup>3)</sup>, die die Vorteile der Verbundapparatur mit denen einer expliziten Heliumverflüssigung zu vereinigen sucht. Nachteilig ist die Notwendigkeit einer Wasserstoffverflüssigungsanlage zur Durchführung dieser Verfahren.

Jede weitere Vereinfachung der Verfahrenstechnik der tiefsten Temperaturen muß in irgendeiner Weise die vorherige Verflüssigung von Wasserstoff entweder eliminieren, oder sie auf ein apparativ

1) Ztschr. ges. Kälteindustrie 39. S. 89. 1932; Actes du VIIe Congrès International du Froid I. S. 367. 1936; F. Simon u. I. E. Ahlberg, Ztschr. f. Phys. 81. S. 816. 1933; F. Simon, A. H. Cooke u. H. Pearson, Proc. Phys. Soc. 47. S. 678. 1935; A. van Itterbeek, Physica VI. S. 728. 1939.

2) Vgl. z. B. F. Simon, Physica IV. S. 879—899. 1937, E. Kanda, Bull. Chem. Soc. Japan 13. S. 241. 1938; K. Mendelssohn, Ztschr. f. Phys. 73. S. 482. 1932.

3) G. Daunt u. K. Mendelssohn, Proc. Phys. Soc. 50. S. 525. 1938.

erträgliches Maß beschränken. Kapitza<sup>1)</sup> ist es gelungen, Helium mit Hilfe einer auf tiefen Temperaturen arbeitenden Expansionsmaschine ohne Zuhilfenahme von flüssigem Wasserstoff zu verflüssigen. Zum Betrieb dieser Apparatur ist lediglich flüssiger Stickstoff erforderlich. Methodisch entspricht dieses Verfahren der bekannten Luftverflüssigung nach Claude. Die Arbeitsleistung des expandierenden Heliums wird bei Kapitza in einer hydraulischen Anordnung vollzogen. Das Problem des Schmiermittels wird elegant gelöst, indem der Kolben der Expansionsmaschine lose im Zylinder geführt wird. Der Expansionsprozeß wird so schnell geführt, daß die Gasmenge, die durch den Zwischenraum zwischen Kolben und Zylinder tritt, klein ist im Vergleich zu der, die expandiert wird. Der Wirkungsgrad der Expansionsmaschine wird dadurch kaum beeinträchtigt, er beträgt etwa 60%, was im Vergleich zur Lindemethode sehr hoch ist. Die Verflüssigungsapparatur ist verständlicherweise sehr vielgestaltig und im Aufbau nicht einfach. Der Heliumverbrauch entspricht dem einer expliziten Heliumverflüssigung mit Wasserstoffvorkühlung. Kapitza betont mit Recht den hohen Wirkungsgrad seiner Anordnung, wenn aber zur Vorkühlung der Versuchsapparatur kein flüssiger Wasserstoff zur Verfügung steht, so muß dieselbe mit flüssigem Helium von einer Temperatur von etwa 65—70° K bis auf etwa 4° K abgekühlt werden. Diese Abkühlung macht praktisch, bis auf die Verluste durch Wärmeleitung und Strahlung, den Gesamtverbrauch an flüssigem Helium aus, auch wenn — etwa durch Abpumpen des Heliums — die Temperatur noch unter 4° gesenkt wird. Wenn man die Versuchsapparatur nicht dadurch komplizieren will, daß ein großer Teil der dem Helium insgesamt innewohnenden Kälte zur Kühlung ausgenützt wird, so wird im wesentlichen nur die Verdampfungswärme des Heliums zum Wärmeentzug benutzt. Dies bedeutet aber, daß nur etwa 6% der dem Helium innewohnenden Kälte zur Abkühlung verwendet wird<sup>2)</sup>. Da größere Mengen von Helium verflüssigt werden können, ist bei dem Fehlen von flüssigem Wasserstoff der mangelhafte Schutz der Versuchsapparatur gegen Wärmeleitung und Strahlung wohl von geringerer Bedeutung.

Gleichsam als Vorstufe zur Vereinfachung der Technik der tiefsten Temperaturen wurde von verschiedenen Seiten die explizite Wasserstoffverflüssigung zu vereinfachen versucht. Ahlberg, Ester-

1) P. Kapitza, Proc. Roy. Soc. **147**, S. 189. 1934.

2) Ausgehend von etwa 65° sind im Verflüssiger einem Kilogramm Helium bis zur Verflüssigung etwa 80 Kal zu entziehen, die Verdampfungswärme beträgt aber nur etwa 5 Kal kg.

mann und Lundberg<sup>1)</sup> geben eine Anordnung an, nach der ohne Zuhilfenahme eines Wasserstoffkompressors, flüssiger Wasserstoff aus Wasserstoffflaschen gewonnen wird. Die Ausbeute betrug etwa  $\frac{1}{2}$  Liter flüssiger Wasserstoff pro Flasche, was äußerst wenig ist. Theoretisch ist der Wirkungsgrad einer solchen Anordnung schon so gering, daß die Methode höchstens dort Verwendung finden kann, wo Flaschenwasserstoff sehr billig zur Verfügung steht. Überall dort, wo der Flaschenwasserstoff mit der Bahn bezogen werden muß, ist ein Wasserstoffkompressor bei der expliziten Wasserstoffverflüssigung wirtschaftlicher. Auf den bei dieser Anordnung verwendeten zuerst von Nelson angegebenen Gegenströmer aus verdillten Rohren kommen wir später noch zurück. Einen Fortschritt in der Vereinfachung der Wasserstoffverflüssigung stellt eine Apparatur dar, die von Keyes, Gerry und Hicks angegeben worden ist<sup>2)</sup>. Diese Verf. erkannten auf Grund theoretischer Überlegungen, daß ohne Kompressor und nur mit Verwendung von Flaschenwasserstoff eine erträgliche Ausbeute nur dann erzielt werden kann, wenn eine Vorkühlung des Wasserstoffs auf 40—50° erfolgt. Diese Temperatur wird mit Hilfe von Wasserstoff, der bei 63° an Kohle adsorbiert wurde und den man langsam unter Zuhilfenahme einer Pumpe desorbieren läßt, erreicht. So gelang es Keyes und seinen Mitarbeitern pro Flasche gasförmigen Wasserstoffs, zwischen 135 und 20 Atm., etwa 45% flüssigen Wasserstoff zu gewinnen.

Rollin<sup>3)</sup> hat den von Ruhemann<sup>4)</sup> angegebenen kleinen Apparat zur Erzeugung von Wasserstofftemperaturen nach dem Lindeschen Verfahren mit der Simonschen Expansionsmethode kombiniert, und so ein Verfahren angegeben, bei dem der Wasserstoff in dem Heliumverflüssiger verflüssigt wird. Da bei einer solchen impliziten Verflüssigung von Wasserstoff keine unwesentlichen Apparateteile zu kühlen sind, und die Kälteisolation besonders sorgfältig durchgeführt werden kann, wird nur sehr wenig flüssiger Wasserstoff zur Vorkühlung des hochgespannten Heliums benötigt. In diesem Fall kommt man trotz des niedrigen Wirkungsgrades der Wasserstoffverflüssigung mit verhältnismäßig wenig Bombenwasserstoff aus. Ein Wasserstoffkompressor und die da-

1) J. E. Ahlberg, I. Estermann u. W. O. Lundberg, *Rev. of scient. Instr.* **8**. S. 422. 1937.

2) F. G. Keyes, H. T. Gerry u. J. F. G. Hicks, *Journ. Americ. Chem. Soc.* **59**. S. 1426. 1937.

3) B. V. Rollin, *Proc. Phys. Soc.* **48**. S. 18. 1936.

4) M. Ruhemann, *Ztschr. f. Phys.* **65**. S. 67. 1930.

durch bedingten umfangreichen Anlagen fallen also bei diesem Verfahren weg. Für den Heliumteil benötigt man einen Heliumkompressor, dessen Leistung allerdings klein sein kann, wenn die Kompression des Heliums nötigenfalls vor dem Versuch vorgenommen wird. Allerdings ist dann ein Heliumgasometer nicht zu entbehren. Die Apparatur ist verhältnismäßig einfach aufzubauen und der Bedarf an Helium gering. Die Zeit vom Einkühlen der Apparatur mit flüssigem Sauerstoff bis zur Erreichung der Heliumtemperatur beträgt bei Rollin etwa  $3\frac{1}{2}$  Std. Sowohl die Simonische Expansionsmethode als auch die Weiterentwicklung von Rollin sind nur für *einmalige* Kälteleistungen brauchbar. Ebenso sind Zwischentemperaturen oberhalb  $5^{\circ}$  schwer für längere Zeit aufrecht zu erhalten.

In der vorliegenden Arbeit wird eine kontinuierlich arbeitende Methode zur Erreichung von Heliumtemperaturen angegeben. Auf eine weitgehende apparative Vereinfachung wurde dabei größter Wert gelegt. Dies gilt sowohl für die Hilfsmittel als auch für den Verflüssiger selbst. Der Tieftemperaturapparat wird bei allen „Verbundverfahren“, wo Verflüssiger und Versuchsapparatur zusammengebaut sind, durch die speziellen Erfordernisse des vorliegenden Experimentes ohnedies apparativ oft stark belastet, so daß der Verflüssiger möglichst einfach gebaut sein muß. Je einfacher der Aufbau, desto größer auch die Betriebssicherheit der Apparatur. Nach Möglichkeit sollten für einfache Versuche, die in jedem Institut vorhandenen experimentellen Hilfsmittel für die Erreichung von Heliumtemperaturen ausreichen.

Da kleinste Mengen von flüssigem Helium für die meisten Versuche schon genügen, spielt der Anlaufvorgang der Apparatur die Hauptrolle. Damit die Anlaufzeit möglichst kurz ist, wurde darauf geachtet, die Wärmekapazität des Verflüssigers so klein wie möglich zu halten. Der Bedarf an Wasserstoff und Helium sollte möglichst gering sein. Die Kälteleistung der Anordnung soll leicht variiert werden können, so daß auch Temperaturen zwischen flüssigem Wasserstoff und flüssigem Helium ohne Schwierigkeiten für längere Zeit konstant gehalten werden können.

Bei der vorliegenden Apparatur<sup>1)</sup> wird die Kälteleistung sowohl bei Wasserstoff als auch bei Helium durch Drosselung erzeugt. Der Heliumgegenströmer ist in seiner ersten Hälfte mit einem Wasserstoffgegenströmer wärmeleitend verbunden. Auf diese Weise

1) Vgl. K. Seiler, Naturw. 27. S. 261. 1939; vorläufige Mitteilung über eine einfache Methode zur Erreichung von Heliumtemperaturen.



wird das Helium unter seine Inversionstemperatur abgekühlt und der Wasserstoff nur dort verflüssigt, wo er zur Vorkühlung des Heliums dient. Außerdem wird nur so viel Wasserstoff verflüssigt, als zur Verflüssigung des Heliums nötig ist. Damit unnötige Wärmeleitungen vermieden werden, werden fest eingebaute Drosselventile verwendet, was sich bestens bewährt hat<sup>1)</sup>. Bei einigermaßen pünktlicher Reinigung und Filterung der Gase hat man kaum Schwierigkeiten durch Verstopfen oder Einfrieren der Ventile zu überwinden. Die Veränderung der Kälteleistung kann durch eine Druckänderung leicht vollzogen werden, die Vermeidung eines von außen zu betätigenden Drosselmechanismus erzwingt deshalb bedeutende apparative Vereinfachungen. Die wärmeleitende Verbindung der einzelnen Rohre der Gegenströmer wird durch Verlöten derselben hergestellt, was später theoretisch begründet wird. Auf diese Weise lassen sich auch kompliziertere Gegenströmer so einfach herstellen, daß sie den üblichen in keiner Weise nachstehen.

Um eine richtige Dimensionierung der Apparatur zu gewährleisten, werden in den §§ 1 und 2 der vorliegenden Arbeit die Grundlagen der Einzelvorgänge erörtert, während in den §§ 3–5 zwei praktische Durchführungen der Methode angegeben werden.

### § 1. Kälteleistung und Kältebedarf

Die nebenstehende Skizze zeigt den prinzipiellen Aufbau des Verflüssigers. Die Rohre 1 und 2 bilden den Wasserstoffgegenströmer, der Heliumgegenströmer besteht aus den Rohren 3 und 4.

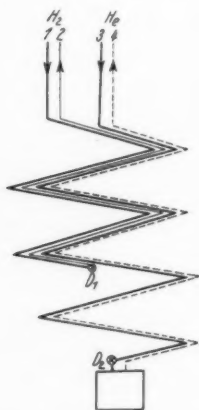


Abb. 1. Prinzipieller Aufbau des Verflüssigers

Rohr 1 führt den komprimierten Wasserstoff zur Drossel  $D_1$ , in 2 strömt das gespannte Gas zurück. Ebenso führt das Rohr 3 das komprimierte Helium zur Drossel  $D_2$ , das entspannte Helium strömt durch 4 wieder zurück. Auf der ersten Hälfte seines Weges ist der Heliumgegenströmer mit dem Wasserstoffgegenströmer wärmeleitend verbunden.

Zwei grundsätzliche Fragen sind bei dieser Anordnung zu klären. Einmal ist die zu erwartende Kälteleistung wichtig. Zur Erreichung dieser theoretischen Kälteleistung ist andererseits die Kenntnis des

1) Vgl. die Arbeit von M. Ruhemann, a. a. O., wo dieser Kunstgriff erstmalig angegeben wurde.

Wärmeaustausches in dem Gegenströmer nötig. Da es sich in dem vorliegenden Fall meist um sehr kleine Kälteleistungen handelt, ist außerdem eine ausreichende Isolation des Verflüssigers gegen Wärme-zuleitung und -zustrahlung unerlässlich.

Zunächst sollen die Formeln für die Kälteleistung erwähnt werden. § 2 ist dem Problem des Wärmeaustausches gewidmet. Die Isolationsfragen werden im praktischen Teil dieser Arbeit erörtert.

Als einfachstes Element des Verflüssigers betrachten wir zunächst den üblichen Gegenströmer (vgl. Abb. 2). Das eventuell vorgekühlte und komprimierte Gas tritt bei 1 ein, wird in D gedrosselt und strömt in 2 zurück.

Indem das entspannte, abgekühlte Gas dem komprimierten im Gegenstrom Wärme entzieht, erregt sich die Apparatur auf immer tiefere Temperaturen. Im stationären Betrieb herrscht hinter D die Temperatur, die der flüssigen Phase des Kältemittels beim Niederdruck auf Grund der Dampfdruckkurve zukommt.

In Abb. 3 und 4 sind die Entropiediagramme für Wasserstoff und Helium nach Keesom und Houthoff<sup>1)</sup> in den uns interessierenden Temperaturgebieten teilweise wiedergegeben. Da die Kurven gleicher Enthalpie eingezeichnet sind, enthalten sie alle für uns wesentlichen Daten.

Auf Grund der beiden Hauptsätze ist die Enthalpiezunahme

$$(1) \quad di = dq + v dp,$$

wenn  $dq$  die dem System zugeführte Wärme bedeutet.

Mit Hilfe der Enthalpie läßt sich die jeweilige Kälteleistung im einfachen und kombinierten Gegenströmer leicht angeben. Zu diesem Zweck nehmen wir zunächst im einfachen Gegenströmer an, daß entsprechend der Abb. 3 das komprimierte Gas mit der spezifischen Enthalpie  $i_1$  in den Gegenströmer am warmen oberen Ende eingeführt wird. Die Drosselung erfolge bei der Enthalpie  $i_3 = i_1$ . Falls die Kälte nicht abgeführt wird, verflüssigt sich ein Teil des Gases.  $i_4'$  bzw.  $i_4''$  sei die Enthalpie pro Kilogramm Flüssigkeit bzw. Dampf bei dem Druck nach der Entspannung. Ist der Wärmeaustausch im Gegenströmer vollkommen, so verläßt das Gas mit  $i_2^0$  den Gegenströmer, andernfalls mit  $i_2$ .



Abb. 2.  
Gegenströmer

1) W. H. Keesom u. D. J. Houthoff, Comm. Leiden XVII, Suppl. 65 d u. 65 e. 1928; vgl. auch W. H. Keesom, Comm. Leiden XVII, Suppl. 65 f. 1928. Abb. 2b auf S. 43.



Kilogramm komprimiertem Gas von Bedeutung. Man erhält die Ausbeute leicht aus einer Betrachtung der Enthalpiebilanz: Der Enthalpiezustrom ist  $i_1$ , der entsprechende Rückstrom  $(1 - \varepsilon) \cdot i_2$ . Die Differenz beider Größen findet sich im Wärmehalt  $\varepsilon \cdot i_4'$  des verflüssigten Anteils wieder. Daraus ergibt sich:

$$(2) \quad \varepsilon = \frac{i_2 - i_1}{i_2 - i_4'}$$

Da in (2) nur Enthalpiedifferenzen eingehen, setzt man  $i_4'$  bei einem Druck von 1 Atm. gleich 0.  $\varepsilon$  wird dann

$$(2a) \quad \varepsilon = 1 - \frac{i_1}{i_2}$$

In Abb. 5 ist die Ausbeute  $\varepsilon$  nach Gl. (2a) in Funktion des Druckes für verschiedene Eintrittstemperaturen für Wasserstoff und

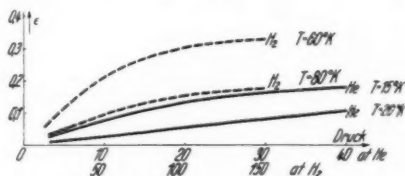


Abb. 5. Ausbeute  $\varepsilon$  in Funktion von Druck und Temperatur für Wasserstoff und Helium

Helium aufgezeichnet<sup>1)</sup>. Der Entspannungsdruck wurde dabei zu einer Atmosphäre angenommen. Man ersieht aus den Kurven die Notwendigkeit einer genügenden Vorkühlung, falls man auf eine explizite Verflüssigung angewiesen ist. Verbindet man jedoch die zu untersuchende Probe wärmeleitend mit der Heliumdrossel, schafft man also eine sogenannte Verbundapparatur, so genügen, wegen der geringen Wärmekapazität der Festkörper bei tiefen Temperaturen, zu einer weiteren Temperaturerniedrigung durch Abpumpen äußerst geringe Mengen von flüssigem Helium<sup>2)</sup>. Die Wärmekapazität des

1) Obgleich bei der vorliegenden Apparatur die Ausbeute nicht die Rolle spielt wie bei expliziten Verflüssigungsanlagen, haben wir die Veränderung der Ausbeute mit der Vorkühltemperatur deshalb gewählt, um die Kälteleistung, deren Größe bei verschiedenen Temperaturen verschieden zu werten ist, mit entsprechenden Größen in Verbindung zu setzen.

2) Bei den mitgeteilten Versuchen genügten bei guter Kälteisolation zu einer Abkühlung bis auf etwa 2,5° K einige Tröpfchen flüssigen Heliums. Bei einer expliziten Heliumverflüssigung verdampfen 100 mal größere Mengen auf dem Weg vom Verflüssiger zum Versuchsgefäß!

Verflüssigers besteht im wesentlichen nur aus den Gegenströmerohren, die Kälteleistung der Wasserstoffdrossel wird in denkbar bester Weise ausgenutzt; man benötigt deshalb zur Vorkühlung des Heliumstromes nur sehr geringe Kälteleistungen. Trotz der Verwendung von Bombenwasserstoff kann man deshalb auf die Vorkühlung des Wasserstoffs unter die Temperatur der flüssigen Luft verzichten, indem man den schlechteren Wirkungsgrad des Wasserstoffgegenströmers in Kauf nimmt.

In den meisten Fällen genügt die Kälteleistung der Heliumdrosselung bei einer Vorkühlung des Heliumstromes auf die Temperatur des flüssigen Wasserstoffs. Ist man jedoch auf eine größere Kälteleistung angewiesen, so läßt sich diese auch erreichen, wenn man noch ein weiteres Rohrpaar mit den bereits vorhandenen wärmeleitend verbindet. Dieses Rohrpaar wird mit Wasserstoff beschickt, der in der Drossel  $D_1'$ , die hinter  $D_1$  liegen soll, entspannt wird. Die Durchsatzgeschwindigkeiten müssen so gewählt werden, daß im Niederdruckteil hinter der Drossel  $D_1'$  ein Druck von einigen Zentimetern Quecksilber leicht aufrecht erhalten werden kann und demnach der Arbeitspunkt dieser Drossel bei etwa  $15^\circ \text{K}$  zu liegen kommt. Da die Hauptlast der Heliumvorkühlung nach wie vor die Drossel  $D_1$  zu tragen hat und  $D_1'$  nur die Vorkühlung des Heliumstromes von 20 auf etwa  $15^\circ$  besorgt, wird selbst bei einer expliziten Heliumverflüssigung angesichts der verhältnismäßig hohen Verdampfungswärme des flüssigen Wasserstoffs, der Durchfluß durch dieses zusätzliche Rohrpaar so klein, daß ohne Schwierigkeiten der geforderte Niederdruck aufrechterhalten werden kann.

Im Falle einer größeren Kälteleistung dürfte sich allerdings statt der Verwendung von Bombenwasserstoff die Benutzung eines Wasserstoffkompressors empfehlen, der den Vorkühlwasserstoff im Kreislauf durch Kompressor und Verflüssiger pumpt. Da in diesem Kreislauf, im Gegensatz zu einer expliziten Wasserstoffverflüssigungsanlage, aber nur geringe Mengen von Wasserstoff liegen, sind besondere Vorichtsmaßnahmen unnötig.

Es soll nun gezeigt werden, wie die Kälteleistung eines zusammengesetzten Gegenströmers, wie er in Abb. 1 skizziert ist, zu berechnen ist. In Abb. 6 ist in einem Enthalpietemperaturdiagramm der Enthalpieverlauf des Heliums längs des Gegenströmers schematisch dargestellt. Für die Eintrittstemperatur  $T_1$  ist  $i_2 < i_1$ , da die Inversionstemperatur des Heliums unter der Temperatur der flüssigen Luft liegt. Die Temperatur der Wasserstoffdrossel liege bei  $T_2$ . Die entsprechenden spezifischen Enthalpien sollen  $\bar{i}_1$  und  $\bar{i}_2$  sein, aus

ihnen errechnet sich nach (2) der Wirkungsgrad  $\epsilon$  der Heliumverflüssigung. Da sich der Wärmeaustausch bei konstantem Druck vollzieht, ist die von der Wasserstoffdrossel aufzubringende Kältemenge durch das Defizit der Enthalpiedifferenz des Rückstroms gegen die Enthalpiedifferenz des Zustroms gegeben. Der Kältebedarf des He-Stromes ist demnach pro Kilogramm zuströmendes Helium:

$$(3) \quad Q_H = i_1 - \bar{i}_1 - (1 - \epsilon)(i_2 - \bar{i}_2).$$

Denken wir uns die hinter der Wasserstoffdrossel entstehende Menge flüssigen Wasserstoffs bei konstantem Niederdruck wieder verdampft, so wird in diesem Fall vom Wasserstoffgegenströmer eine Wärmemenge von  $\epsilon(i_2 - i_4')$  aufgenommen. Diese Größe entspricht nach (1) der Differenz der spezifischen Enthalpie am warmen Ende des Gegenströmers. Die Kälteleistung des Wasserstoffgegenströmers pro Kilogramm Durchsatz<sup>1)</sup> ist demnach durch die Enthalpiedifferenzen von Zu- und Rückstrom bei der Temperatur der flüssigen Luft gegeben.

Auf Grund der Gl. (3) und (1) läßt sich so nach Wahl der Betriebsdaten des Heliumteils bei vorgegebenem Hochdruck im Wasserstoffzustrom der entsprechende Wasserstoffdurchsatz des kombinierten Gegenströmers leicht finden.

Leistung und Durchsatz einer etwaigen weiteren Drossel  $D_1'$  werden auf dieselbe Weise berechnet.

Für die Dimensionierung der Gegenströmer sind die zugelassenen Temperaturdifferenzen von  $i_1$  und  $i_2$  noch von Wichtigkeit. Aus Abb. 3 folgt, daß bei Wasserstoff eine Temperaturerniedrigung des rückströmenden Gases gegen den Zustrom von 1–2° am Eingang keine besonders nachteiligen Folgen für die Kälteleistung hat. Dagegen ist, wie Abb. 4 zeigt, der Heliumgegenströmer so zu dimensionieren, daß die am warmen Ende auftretenden Temperaturdifferenzen kleiner als 0,1–0,2° sind.

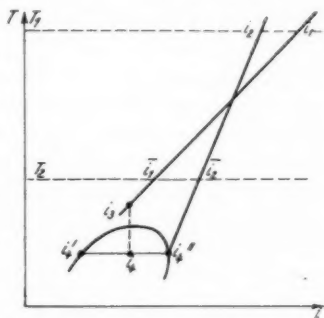


Abb. 6. Schematischer Verlauf der Enthalpie von He längs des zusammengesetzten Gegenströmers

1) Falls sich hinter der Drossel kein flüssiger Wasserstoff mehr bilden kann, ist Zu- und Rückstrom gleich groß.

## § 2. Der Wärmeaustausch

Der Strömungscharakter in den Rohren des Gegenströmers ist turbulent<sup>1)</sup>. Wir können deshalb die von Nusselt bestimmten Formeln zur Bestimmung der Wärmeübergangsziffer benutzen. Nusselt fand auf Grund von Experimenten und Ähnlichkeitsbetrachtungen für die Wärmeübergangszahl  $\alpha$  folgenden Ausdruck<sup>2)</sup>:

$$(2,1) \quad \frac{\alpha \cdot d}{\lambda} = 0,035 \left( \frac{d}{l} \right)^{0,05} \left( \frac{d \cdot v \cdot \varrho \cdot c_p}{\lambda} \right)^{0,79}.$$

Dabei ist  $d$  der Rohrdurchmesser,  $\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit des Gases,  $\alpha$  die Wärmeübergangszahl nach der Definition  $\frac{Q}{t} = \alpha \cdot F \cdot (T_1 - T_2)$  [Wärmefluß  $\sim$  Fläche  $F$  und Temperaturdifferenz  $(T_1 - T_2)$ ],  $v$  Geschwindigkeit des Gases,  $c_p$  spezifische Wärme,  $\varrho$  die Dichte desselben,  $l$  Rohrlänge.

Der vorstehende Ausdruck ist durch Experimente bei Normaltemperaturen gewonnen. Dabei war die Außentemperatur des Rohres konstant. Es erhebt sich die Frage, ob bei tiefen und variablen Außentemperaturen die Temperatur explizit in den Ausdruck für  $\alpha$  eingehen wird oder nur mittelbar in der Temperaturabhängigkeit der Materialkonstanten auftritt. Die Anwendung der Dimensionsanalyse<sup>3)</sup> verneint die erste Frage, erlaubt also die Anwendung des Nusseltschen Ausdruckes auch bei unseren Bedingungen<sup>4)</sup>. Da unsere Rohre

1) Die kritische Reynoldssche Zahl  $Re = \frac{v \cdot \varrho \cdot d}{\eta}$  für Rohre ist 2000.

D. h. die Geschwindigkeit  $v$  muß  $> \frac{2000 \cdot \eta}{\varrho \cdot d}$  sein, damit turbulente Strömung vorliegt.  $\eta_{H_2}$  zwischen 20 und 80° ist etwa  $1 \cdot 10^{-5}$  c.g.s.-Einheiten; bei etwa 30–50 Atm. und denselben Temperaturen ist die Dichte  $\varrho_{H_2} \approx 1,5 \cdot 10^{-2}$  g/cm<sup>3</sup>, der Durchmesser der verwendeten Rohre ist 0,1 cm,  $v_{Re} \approx 15$  cm/sec. Bei einem Durchsatz von nur 3 Liter/Min. ist aber  $v \approx 40$  cm/sec. Für Helium sind folgende Werte einzusetzen:  $\eta_{He} \approx 1 \cdot 10^{-5} - 8 \cdot 10^{-5}$ ; bei etwa 10 Atm. und 10° K ist  $\varrho_{He} \approx 5 \cdot 10^{-2}$  g/cm<sup>3</sup>;  $v_{Re} \approx 3$  cm/sec. Ein Durchsatz von etwa 3 Liter/Min. liefert etwa  $v \approx 20$  cm/sec. Der turbulente Strömungscharakter könnte bei Helium also höchstens am warmen oberen Ende des Gegenströmers nicht voll ausgeprägt sein.

2) Vgl. z. B. Handb. d. Phys. Bd. XI, S. 143, Gl. (73a).

3) P. W. Bridgman, Theorie der physikalischen Dimensionen, deutsch von H. Moll; Teubner, Leipzig und Berlin; 1932. Vgl. auch E. Fues, Ztschr. f. Phys. 107. S. 662. 1937.

4) Der Wärmeübergang im Rohr kann nach den entsprechenden Differentialgleichungen von folgenden Größen abhängen: Geschwindigkeit  $v$ , Rohrdurchmesser  $d$ , Dichte  $\varrho$ , Spezifische Wärme  $c_p$ , Temperatur  $T$  und Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  des Gases. Damit die Aussage möglichst ergiebig wird, führen wir als Grundgrößen die Masse  $m$ , Länge  $l$ , Zeit  $t$ , Temperatur  $T$  und die Wärmemenge  $Q$  in Kalorien ein. Da weder das mechanische Wärmeäquivalent,



sehr lang sind im Vergleich zum Durchmesser, lassen wir in (2,1) den für den „Einlauf“ maßgebenden Faktor  $\left(\frac{d}{l}\right)$  weg. Für  $\alpha$  erhält man so

$$(2,2) \quad \alpha = 0,035 \left(\frac{\lambda}{d}\right)^{0,21} (v \cdot \rho \cdot c_p)^{0,79}.$$

Wir schätzen zunächst die Größe von  $\alpha$  ab. Die Wärmeleitfähigkeit der Gase ist bei unseren Temperaturen  $< 10^{-4}$ ;  $d = 0,1$  cm;  $\frac{\pi d^2}{4} \cdot v \cdot \rho \cdot c_p$  ist die Wärmekapazität der sekundlich durch den Gegenströmer fließenden Gasmenge. Bei einem Durchfluß von etwa 3 Liter pro Minute beträgt diese Größe bei Wasserstoff etwa 0,015, bei Helium etwa 0,01. Die entsprechenden Werte für  $\alpha$  ergeben sich zu  $\alpha < 0,02$  bei Wasserstoff und  $\alpha < 0,01$  bei Helium.

Diese Wärmeübergangszahlen vergleichen wir nun mit denen, die sich aus der Wärmeleitung in der Rohrwand ergeben. Ist die Wandstärke des Rohres  $a$ , so entspricht der Wärmeübergangszahl  $\alpha$  hier der Wert von  $\lambda/a$ , wo  $\lambda$  die Wärmeleitzahl der Wand bedeutet.

Für Kupfer ist  $\lambda_{\text{Cu}}^{\text{cal}} > 1 \frac{\text{cal}}{^\circ\text{C} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}}$ , für Neusilber, dessen Wärmeleitzahl im Gegensatz zu den reinen Metallen bei abnehmender Temperatur abnimmt, ist bei  $15^\circ \text{K}^1$ ) noch  $\lambda_{\text{W}}^{\text{Ns}} > 0,02 \frac{\text{cal}}{^\circ\text{C} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}}$ .

Die entsprechenden Wärmeübergangswerte sind bei einer Wandstärke

noch die Boltzmannkonstante für unseren Vorgang eine Rolle spielt, so sind alle 5 Grundgrößen als unabhängig anzusehen.

Die Potenzen der Grundgrößen für die vorliegenden Größen sind aus der folgenden Matrix zu ersehen:

	$q$	$v$	$d$	$T$	$c_p$	$\lambda$	$\alpha$	$l$
$M$ . . . .	1	0	0	0	-1	0	0	0
$l$ . . . .	-3	1	1	0	0	-1	-2	1
$t$ . . . .	0	-1	0	0	0	-1	-1	0
$T$ . . . .	0	0	0	1	-1	-1	-1	0
$Q$ . . . .	0	0	0	0	+1	+1	+1	0

Es können daraus nur die folgenden drei dimensionslosen Konstanten

$$\frac{c_p \cdot \rho \cdot v \cdot d}{\lambda}; \quad \frac{\alpha d}{\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{l}{d}$$

gebildet werden. Nach dem  $\pi$ -Theorem ist also

$$\frac{\alpha \cdot d}{\lambda} = f\left(\frac{c_p \cdot \rho \cdot v \cdot d}{\lambda}, \frac{l}{d}\right).$$

Die Temperatur kommt also explizit nicht vor. Unser Ergebnis stimmt mit der Nusseltschen Form überein, was ja auch sein muß, da die Dimensionsanalyse Ähnlichkeitsbetrachtungen enthält.

1) Vgl. J. Karweil u. K. Schäfer, Ann. d. Phys. [5] 36. S. 567. 1939.

von 0,05 cm größer als 20 bei Kupfer bzw. 0,4 bei Neusilber. Man sieht daraus, daß der hauptsächlichste Wärmewiderstand gar nicht im Rohrmaterial, sondern im Gase selbst liegt. Da der turbulente Kern im Gas aber für genügende Wärmeleitung durch Konvektion sorgt, kommt als Widerstandsträger in erster Linie die Grenzschicht in unmittelbarer Nähe der Rohrwandung in Betracht. Die Art des Rohrmaterials ist daher bezüglich eines möglichst geringen Wärmewiderstandes senkrecht zur Rohrachse in weiten Grenzen belanglos<sup>1)</sup>. Damit der Kälteverlust längs des Gegenströmers möglichst klein wird, entschließen wir uns für Neusilber.

Da der Hauptwärmewiderstand im Gase selbst liegt, ist es außerdem ohne eine Beeinträchtigung der Wirkung des Gegenströmers durchaus erlaubt, die Rohre einfach miteinander zu verlöten. Auf diese Weise lassen sich leicht auch kompliziertere Gegenströmer aus den üblichen einfacheren aufbauen, was bei einer ineinanderführung der Rohre unnötige Komplikationen ergeben würde. Außerdem hat das Nebeneinanderführen der Gegenstromrohre bezüglich der Wärmekapazität noch Vorteile, worauf wir später zurückkommen.

Die bei unseren Verhältnissen vorliegende Unabhängigkeit des Wärmeüberganges vom Rohrmaterial wurde in dem folgenden Handversuch qualitativ bestätigt.

Ein U-förmig gebogenes und mit Wasserstoff beschicktes Rohr taucht in flüssige Luft. Der Wasserstoff wird so von Zimmertemperatur auf etwa 80° K abgekühlt. Die an den einzelnen Rohrstellen abgegebene Wärme wird von der flüssigen Luft durch Verdampfung aufgenommen. Das Blasenbild dieses Vorgangs veranschaulicht somit die Wärmeübertragung vom Rohr nach dem Kühlbad. Es wird nun einmal ein Kupferrohr (0,1 cm innerer Durchmesser und 0,05 cm Wandstärke), das andere Mal ein gleichdimensioniertes Neusilberrohr zur Abkühlung des Wasserstoffs verwendet. In beiden Fällen muß, wenn das Rohrmaterial wirklich keine Rolle spielt, bei gleichem sekundlichen Durchfluß das Blasenbild dasselbe sein. Der Versuch bestätigt völlig die Erwartung. Das U-Rohr wurde mit der Bogenlampe seitlich beleuchtet und das Bild von vorn aufgenommen. Abb. 7 zeigt ein Kupferrohr bei einem Durchfluß von etwa 20 Liter/Min.; Abb. 8 das entsprechende Neusilberrohr bei ebenfalls 20 Liter/Min. Man erkennt auf den Bildern keinerlei Einfluß des Rohrmaterials, obgleich bei etwa 100° K die

1) Lediglich bei größeren Strömungsgeschwindigkeiten kann das Wandmaterial von Einfluß auf den Wärmeaustausch werden.

Wärmeleitzahl von Kupfer etwa 25—30 mal größer ist als die von Neusilber.

Hierzu ist folgendes zu bemerken. Die Versuche sind nur dann beweiskräftig, wenn nicht der Wärmestrom an der Grenze Metall-flüssige Luft einem Übergangswiderstand unterliegt, der größer ist

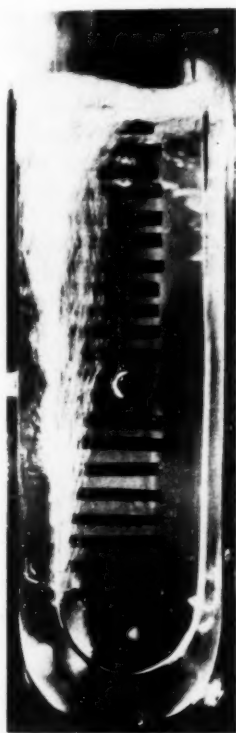


Abb. 7. Das Blasenbild eines Cu-Rohres bei 20 Liter/Min. Durchsatz

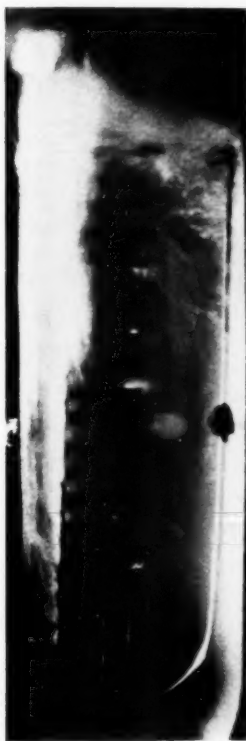


Abb. 8. Dasselbe wie in Abb. 7 für ein gleichdimensioniertes Neusilber-Rohr

als der innerhalb des Gases. Da aber die flüssige Luft die Wärme durch Verdampfung aufnimmt, ist für den Wärmeübergang an der äußeren Grenzfläche lediglich die Verdampfungsgeschwindigkeit der flüssigen Luft maßgebend. Falls sich längs des Rohres kein zusammenhängender Luftfilm bildet, was man daran erkennt, daß die Luft in Form vieler kleiner Bläschen am Rohr selbst aufsteigt, ist die Verdampfungsgeschwindigkeit so groß, daß die Wärme von der

Rohrwand zur flüssigen Luft mit wesentlich geringerem Widerstand übertragen wird, wie innerhalb des Gases.

Bei größerer Durchflußgeschwindigkeit bildet sich jedoch immer ein zusammenhängender Luftfilm um die äußere Rohrwand, der sich erst dort in viele kleine Luftbläschen auflöst, wo die zu übertragende



Abb. 9. Bildung eines zusammenhängenden Luftfilms bis zu der mit dem Pfeil gekennzeichneten Stelle (Durchsatz 20 Liter/Min.)

Wärme zur Bildung eines geschlossenen Filmes nicht mehr ausreicht. In Abb. 9 ist diese Stelle mit einem Pfeil gekennzeichnet. (Es sei hervorgehoben, daß nach wie vor das Gas von links in das U-Rohr einströmt!). Diese Erscheinung ist durchaus sekundär und für den Wärmeübergang vom Gas zur Rohrwand ohne Belang. Wir haben sie dadurch unterdrückt, daß wir an die Rohrwand kleine Fähnchen anlöteten<sup>1)</sup>.

Die Existenz eines zusammenhängenden Luftfilms scheint mir der Grund dafür zu sein, daß Bichowski<sup>2)</sup> im Gegensatz zu den Nusseltschen Ergebnissen und auch im Gegensatz zu Folgerungen aus Dimensionsbetrachtungen fand, daß die Wärmeübergangsziffer im Rohr umgekehrt proportional zur Strömungsgeschwindigkeit ist.

Die Formeln für die Wärmeübergangszahl erlauben die Untersuchungen des Wärmeaustausches im Gegenströmer.  $T(x)$  sei die Temperaturverteilung längs der Rohrwand,  $\vartheta(x)$  die Temperatur im turbulenten Kern des strömenden Gases. Die Wand kann nach dem Vorhergehenden als unendlich dünn angesehen werden. Im stationären Zustand ist die pro Zeitelement  $dt$  und pro 1 cm Länge übertragene Wärmemenge

$$(2,3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \alpha \cdot 2\pi r [T(x) - \vartheta(x)] \\ &= q \cdot \pi r^2 \cdot c_p \frac{d\vartheta}{dt} \end{aligned} \right.$$

1) Vgl. eine demnächst erscheinende Notiz über eine Veranschaulichung der Nusseltschen Theorie des Wärmeübergangs in Rohren.

2) R. Bichowski, Journ. Ind. Eng. Chemistry 14. S. 62. 1922.

$r$  ist der Rohrradius,  $\alpha$  die Wärmeübergangszahl des Gases,  $c_p$  die spezifische Wärme desselben. Die substantielle Änderung der Temperatur mit der Zeit ist in unserem Fall  $v \frac{d\vartheta}{dx}$ , wobei  $v$  die Strömungsgeschwindigkeit des Gases darstellt. Aus (2,3) ergibt sich so:

$$(2,4) \quad \frac{d\vartheta}{dx} = \gamma [T(x) - \vartheta(x)]$$

mit

$$(2,5) \quad \gamma = \frac{2\alpha}{r \cdot \varrho \cdot c_p \cdot v}.$$

Aus (2,4) und (2,5) sieht man, daß die Größe  $\gamma$  die Temperaturleitung im Gegenströmer beherrscht, welche Temperaturverteilung  $T(x)$  auch vorliegen mag. Wir kommen auf die Diskussion von  $\gamma$  noch zurück und nehmen zunächst für eine einfache Rechnung  $\gamma$  längs der Rohre als konstant an.  $T(x)$  falle linear von einem Wert  $T_0$  für  $x=0$  nach  $T_l$  für  $x=l$  am Ende des Gegenströmers ab. Am Eingang habe  $\vartheta$  den Wert  $\vartheta_0$ . (2,4) lautet umgeschrieben:

$$(2,6) \quad \vartheta' + \gamma \vartheta = \gamma \cdot T(x).$$

Man prüft leicht nach, daß mit  $T'' = 0$  der folgende Ausdruck eine Lösung der inhomogenen Gl. (2,6) ist:

$$(2,7) \quad \vartheta = T - \frac{1}{\gamma} \frac{dT}{dx}.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung von (2,6) ist

$$\vartheta = C \cdot e^{-\gamma x}.$$

Die allgemeine Lösung der Gl. (2,6) hat demnach die Form:

$$(2,8) \quad \vartheta = C \cdot e^{-\gamma x} + T - \frac{1}{\gamma} \frac{dT}{dx}.$$

$C$  bestimmt sich aus der Randbedingung am oberen Ende des Rohres ( $x=0$ ):

$$C = \vartheta_0 - T_0 + \frac{1}{\gamma} \frac{dT}{dx}.$$

Damit erhält man für die Temperaturabhängigkeit längs des Rohres<sup>1)</sup>

$$(2,9) \quad \vartheta - T = \frac{|T_0 - T_l|}{\gamma \cdot l} (1 - e^{-\gamma x}) + (\vartheta_0 - T_0) e^{-\gamma x}.$$

Für genügend große Werte von  $x$  ist der Temperaturunterschied  $(\vartheta_0 - T_0)$  am Anfang bedeutungslos und die am Ende herrschende Temperaturdifferenz allein abhängig vom äußeren Temperaturgefälle  $\frac{T_0 - T_l}{l}$  und von  $\gamma$ . Mit (2,5) und (2,2) erhalten wir

1) Vgl. eine ähnliche Formel bei H. Gröber, Gesundheitsing. 1923, S. 241. Annalen der Physik. 5. Folge. 39.

für die den Wärmeübergang im Gegenströmer allein bestimmende Größe  $\gamma$

$$(2,10) \quad \gamma = \frac{0,07}{r} \left( \frac{\lambda}{q \cdot c_p \cdot v} \right)^{0,21} \approx \frac{0,07}{r} \sqrt[5]{\frac{\lambda}{q \cdot c_p \cdot v}}$$

Mit den früheren Werten erhält man für  $\gamma$  etwa  $0,4 \text{ cm}^{-1}$ . Man sieht an dieser Formel besonders deutlich, daß eigentlich nur der Rohrdurchmesser eine wesentliche Rolle für den Wärmeaustausch spielt. Das sekundlich durch den Gegenströmer fließende Volumen ist von sehr geringer Bedeutung, da es nur etwa in der 5. Wurzel eingeht. Auf die Entstehung des Faktors  $1/r$  in (2,10) zurückgreifend, läßt sich sagen, daß  $\gamma$  um so größer, der Wärmeaustausch also um so besser ist, je größer das Verhältnis von Oberfläche und Volumen eines Rohrquerschnitts ausfällt. Diese Tatsache ist plausibel, da der Wärmeübergang ein Oberflächeneffekt, die Erwärmung selbst dagegen ein Volumeneffekt ist. Daß dieses Verhältnis fast allein für den Wärmeübergang ausschlaggebend ist, liegt daran, daß  $\alpha$  mit dem sekundlichen Durchsatz wächst, was auf eine Verkleinerung der Grenzschichtdicke bei größerem Durchfluß zurückzuführen ist.

In diesem Zusammenhang sei auf die besonders von amerikanischer Seite vorgeschlagene relative Vergrößerung der Oberfläche durch Veränderung des Rohrprofils hingewiesen<sup>1)</sup>. Bei einer Profiländerung kann unter Umständen der Druckverlust unerwünschte Werte annehmen. Außerdem ist nach (2,9) nicht allein  $\gamma$  für den Wärmeaustausch im Gegenströmer maßgebend, das Temperaturgefälle spielt eine ebenso große Rolle. Wenn  $\gamma$  vergrößert wird, kann die Länge des Gegenströmers zwar verkleinert werden, jedoch nicht so weit, daß  $\gamma \cdot l$  wesentlich verkleinert wird. Dieser Umstand scheint mir bei Verwendung sogenannter „twisted tubes“ als Gegenströmer nicht genügend beachtet zu sein.

Falls man gleichdimensionierte Rohre aneinanderlötet, haben beide Rohre dieselben  $\gamma$ -Werte. Bei der Ineinanderführung von Rohren ist  $\gamma$  für das äußere Rohr bei gleichem Strömungsquerschnitt eventuell günstiger, die Länge des Gegenströmers wird aber durch den kleinsten  $\gamma$ -Wert, und dies ist der des inneren Rohres, bestimmt. Man sieht auch, daß bei einer Ineinanderführung von mehreren Rohren die äußeren meist zu lang sind und demnach die Wärmekapazität der Apparatur unnötig erhöhen.

1) Z. B. R. Bichowsky, a. a. O. S. 19; F. G. Keyes u. Mitarbeiter, a. a. O. S. 4; J. E. Ahlberg, I. Estermann u. W. O. Lundberg, a. a. O. S. 4.

Nach (2,9) läßt sich nun die Länge des Gegenströmers angeben. Dabei ist zu bedenken, daß die Temperaturdifferenz zwischen Zu- und Rückstrom am oberen Ende für den Zustrom kaum von Bedeutung wird, da  $\gamma x \gg 1$  gewählt wird. Da diese Temperaturdifferenz aber nach § 1 für den Wirkungsgrad der Anlage von großer Bedeutung ist, ist die Länge so zu bemessen, daß die sich nach (2,9) ergebende Temperaturdifferenz ( $\vartheta - T$ ) so klein ist, daß der Wirkungsgrad der Apparatur nicht gefährdet wird<sup>1)</sup>. Für  $\gamma = 0,4$  ergibt sich bei einer Länge von 150 cm für den Wasserstoffteil eine Temperaturdifferenz von 1° und für den Heliumteil eine solche von etwa 0,25°. Besonders für den Heliumteil des Gegenströmers ist diese Länge fast zu klein.

### § 3. Der apparative Aufbau Der Verflüssiger

Abb. 10 zeigt eine Ausführungsform, mit der Temperaturen bis herab zu 2,4° K erreicht werden.

$H_2$  sind die beiden Wasserstoff führenden Rohre des Wasserstoffgegenströmers.  $He$  diejenigen des Heliumgegenströmers. Als Rohrmaterial wurde Neusilber gewählt. Der Außendurchmesser der Rohre beträgt 2 mm, der Innendurchmesser 1 mm. Die Länge des Wasserstoffgegenströmers ist 120 cm, die des Heliumgegenströmers 240 cm. Die Rohre wurden weich miteinander verlötet.  $D_1$  ist die Wasserstoffdrossel. Diese einfache aus zwei Metallstegen bestehende Quetschbrücke hat sich ausgezeichnet bewährt. Wenn die Schrauben-

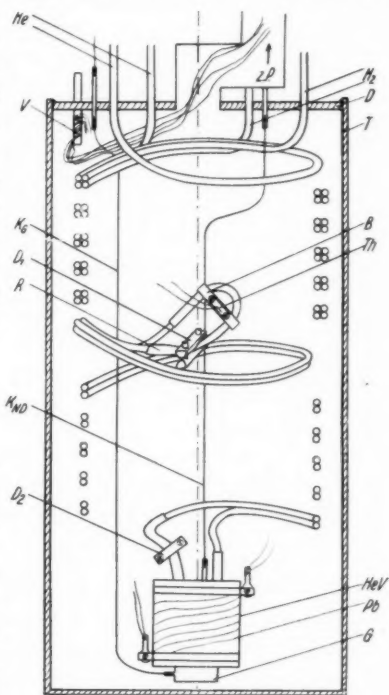


Abb. 10. Aufbau des Verflüssigers

1) Zweckmäßig gibt man die Temperaturverteilung im Zustrom vor und berechnet daraus die Erwärmung des Rückstromes. Da in die Formeln nur Temperaturdifferenzen eingehen, dürfte die Annahme einer linearen Temperaturverteilung  $T(x)$  gerechtfertigt sein.



gewinde genügend feingängig sind, läßt sich die Drossel ohne Schwierigkeiten einstellen. Um zum Quetschen ein möglichst weiches Material zu haben, wurde am Ende des Wasserstoffgegenströmers ein kurzes ausgeglühtes Kupferrohr  $R$  von 3 mm Außendurchmesser und 2 mm Innendurchmesser über das Neusilberrohr geschoben und damit verlötet. Die Brücke  $B$  ist auf den Kupferbogen  $R$  hart aufgelötet und trägt das Thermoelement  $Th$ , das auf die möglichst ebene Brücke aufgeschraubt wird.

Die Heliumdrossel  $D_2$  ist wie  $D_1$  konstruiert.  $HeV$  dient zur Aufnahme von flüssigem Helium. Das Gefäß ist starkwandig, so daß es auch leichterem Überdruck standhält. Das Material ist Kupfer, um eine möglichst schnelle und gleichmäßige Temperaturverteilung zu gewährleisten. Boden und Deckel sind hart eingelötet. Auf das Gefäß ist ein Bleidraht  $Pb$  gewickelt. Am Boden des Gefäßes ist das Gasthermometergefäß  $G$  weich aufgelötet.  $K_6$  ist eine dünnwandige Neusilberkapillare zum Vakuummeter des Gasthermometers.  $K_{ND}$  eine Kapillare zu einem Niederdruckmanometer.

$V$  ist ein Kupferstift, um den alle Drähte gewickelt werden, ehe sie zu den auf tiefer Temperatur liegenden Teilen weiterführen. Damit wird vermieden, daß die Kupferdrähte, deren einseitiges Ende auf Zimmertemperatur liegt, den auf tiefer Temperatur liegenden Teilen zu große Wärmemengen zuführen. Außerdem ist der Durchmesser der Kupferdrähte 0,05 mm. Das weite Rohr im Deckel  $D$  führt zur Hochvakuumpumpe, es ist geknickt, um Einstrahlungen von auf Zimmertemperatur befindlichen Teilen des oberen Rohrendes zu vermeiden. Der Topf  $T$  wird über den Apparat geschoben und oben mit dem Deckel  $D$  verlötet. Der Rand von  $D$  steht eine Kleinigkeit über, so daß sich leicht zwischen  $T$  und  $D$  eine kleine Lotkehle legen läßt. Auf diese Weise läßt sich  $T$  ohne Schwierigkeit jederzeit bei fest eingebaunter Apparatur ein- oder auslöten. Die Wasserstoff und Helium zuführenden Rohre haben knapp über dem Rohrknie noch etwa zwei Windungen, um die komprimierten Gase auf die Temperatur der flüssigen Luft vorzukühlen. Über  $T$  wird ein Dewargefäß mit flüssiger Luft geschoben. Die Abb. 10 ist nicht maßstabstreu, der Durchmesser des Topfes ist 7 cm, seine Länge etwa 30 cm.

Abb. 11 zeigt den Verlauf der Rohrleitungen für Wasserstoff- und Heliumteil des Gegenströmers. Die Adsorber  $A$  bestehen aus druckfesten Messingrohren, die mit ausgeheizter Aktivkohle gefüllt sind und in flüssige Luft tauchen. Die Filter  $F$  haben die Aufgabe, die komprimierten Gase von Kohlestaub und sonstigen mechanischen

Beimengungen zu befreien: gut hat sich dazu engmaschige Kupfergaze bewährt, die abwechselnd in kleinen Röllchen und ausgestanzten Scheibchen in ein Rohr gepackt wird.  $H_2$  und  $He$  sind Wasserstoff- bzw. Heliumbomben,  $V$  der Verflüssiger.

#### Der Betrieb der Apparatur

Der Topf  $T$  wird mit Wasserstoff als Wärmeausgleichsgas von etwa 2–3 cm Druck gefüllt. Das mit flüssiger Luft gefüllte Dewargefäß wird über  $T$  geschoben. Die Apparatur kühlt sich auf die Temperatur der

flüssigen Luft ab. Durch die Wasserstoffleitung werden bei eingekühltem Adsorber einige Stöße Wasserstoff gegeben, um den unreinen Wasserstoff zu entfernen. Dasselbe geschieht in der Heliumleitung mit Wasserstoff (vgl. Abb. 11, das Ventil  $H_1$  ist dabei geschlossen!). Nach 30 Min. ist die Apparatur auf etwa 80° K, was sowohl am Thermoelement als auch am Gasthermometer abgelesen werden kann. Das Wärmeausgleichsgas wird mit einer Hochvakuumpumpe abgepumpt. Nach etwa 20 Min. herrscht innerhalb  $T$  Klebvakuum. Durch die Wasserstoffleitung wird Wasserstoff geschickt, die Temperatur hinter der Wasserstoffdrossel mit dem Thermoelement kontrolliert. Nach etwa 5 Min. fällt die Temperatur hinter der Drossel nicht mehr, jetzt wird durch die Heliumleitung etwas Wasserstoff gegeben, um den unteren Teil des Gegenströmers ebenfalls auf Wasserstofftemperaturen vorzukühlen.

Die Abkühlung des Heliumteiles auf Wasserstofftemperatur geht innerhalb 10 Min. bequem vor sich, wenn die Wärmekapazität des Gefäßes  $HeV$  nicht zu groß ist. Der bisherige Wasserstoffverbrauch ist leicht unter 150–200 Liter gasförmigen Wasserstoffs zu halten. Die weitere Wasserstoffzufuhr für die Wasserstoffdrossel wird jetzt auf etwa 10 Atm. gedrosselt, da sehr wenig flüssiger Wasserstoff hinter  $D_1$  gebraucht wird.

Der Ausgang der Ölpumpe  $P$  wird an den Heliumgasometer angeschlossen und durch  $H_1$  die Heliumzufuhr geöffnet. Nach 5 Min. tritt beispielsweise die Supraleitung des Bleidrahtes ein und nach weiteren 5 Min. zeigt das Gasthermometer etwa 3–4° an.

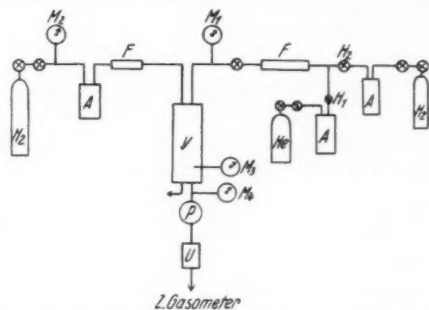


Abb. 11. Die Schaltung der in Abb. 10 skizzierten Apparatur

Der Heliumdurchsatz beträgt bis zu dieser Temperatur etwa 20 Liter. Es kann nun entweder He verflüssigt werden oder man sperrt die Heliumzufuhr ab und bringt durch Expansion der geringen Menge gasförmigen Heliums in *HeV* das Gefäß kurzzeitig auf etwa 2,5°K.

#### Zubehör

Das Hochdruckmanometer  $M_1$  (vgl. Abb. 11) mißt den Druck des komprimierten Heliums,  $M_3$  den Druck des Heliums unmittelbar hinter der Drossel (vgl. die Leitung  $K_{ND}$  in Abb. 10),  $M_4$  kontrolliert die Ölpumpe. Als Pumpe  $P$  reicht eine der üblichen Ölpumpen völlig aus. Der Gasmesser  $U$  mißt den Durchfluß.

Die Nebenlötstelle des Thermoelementes liegt auf der Temperatur der flüssigen Luft. Als Drähte wurden Kupfer und Konstantan verwendet, ein einfaches Tischgalvanometer dient als Spannungsmesser (ausreichend ist z. B. ein Tischgalvanometer der Fa. Rustrat Type BSG). Statt dessen kann man auch die Temperatur der Wasserstoffdrossel ebenso wie bei der Heliumdrossel mit einem kleinen Simonschen Gasthermometer messen, das mit Wasserstoff gefüllt ist. (Vgl. dazu die Ausführungen über Gasthermometer weiter unten.)

In Abb. 11 sind nicht mitgezeichnet eine Anzahl Manometer, die dazu dienen, Undichtigkeiten vor Inbetriebnahme der Anlage leicht zu erkennen, und während des Betriebes solche leicht aufzufinden. Letzteres ist allerdings bei einigermaßen sorgfältiger Lötarbeit äußerst selten. Außerdem kann der Verbrauch an flüssiger Luft beträchtlich eingeschränkt werden, wenn die Adsorber  $A$  alle in ein Gefäß mit flüssiger Luft tauchen und kurze Gegenstromspiralen von einigen Windungen dafür sorgen, daß das den Adsorber verlassende Gas den Zustrom zum Adsorber vorkühlt. Die Länge dieser Gegenströmer ergibt sich leicht aus den Überlegungen des § 2 und kann sehr knapp bemessen werden, da es jetzt durchaus statthaft ist, eine größere Temperaturdifferenz am oberen Ende des Gegenströmers zuzulassen.

Der Bleidraht wurde folgendermaßen auf dem zylindrischen

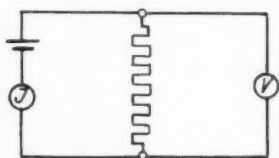


Abb. 12. Widerstandsmessung des Bleidrahtes

Gefäß *HeV* angebracht. Mit Hochvakuumfett wird zunächst eine Lage Durchschlagpapier um den Kupferzylinder gelegt. Auf den so isolierten Kupfermantel werden die beiden Halteringe und unter dieselben die beiden Enden des Bleidrahtes geschoben. Mittels Schrauben können die Halteringe fest

an den Kupferzylinder angepreßt werden und geben so mit dem Bleidraht guten Kontakt. Der Widerstand des Bleidrahtes wird in 4-Polschaltung gemessen, die in Abb. 12 kurz angedeutet ist. Als Amperemeter kann ein übliches Vielfachmeßgerät verwendet werden, ein Türmcheninstrument reicht als Voltmeter völlig aus. Als Stromquelle dient ein 2-Volt-Akkumulator mit Potentiometer.

#### Das Gasthermometer

Zur Temperaturmessung des Heliumgefäßes *HeV* wurde ein vereinfachtes Gasthermometer nach Simon verwendet<sup>1)</sup>. Das verhältnismäßig große Manometervolumen *M* und das eigentliche Thermometervolumen *G* sind durch die Neusilberkapillare *K* miteinander verbunden. Das Gasthermometer ist mit reinstem Helium gefüllt. Da das Volumen von *M* groß ist im Vergleich zu *G*, zeigt dieses Thermometer Temperaturen zwischen flüssiger Luft und Zimmertemperatur sehr ungenau an, wird aber in dem Gebiet zwischen flüssigem Wasserstoff und flüssigem Helium recht genau, so daß damit eine Genauigkeit von etwa  $0,1^\circ$  erzielt werden kann. Sobald sich in *G* flüssiges Helium kondensiert, wirkt es als Dampfdruckthermometer und erhöht dementsprechend die bisherige Genauigkeit noch beträchtlich. Als Manometer wurde ein Präzisionsmetallvakuummeter mit einem Meßbereich zwischen 0 und 76 cm Vakuum benutzt<sup>2)</sup>. Falls an die Temperaturmessung bezüglich der Genauigkeit nicht zu große Forderungen gestellt werden müssen, sind solche Metallmanometer ausreichend. Ein Nachteil derselben ist, daß ihre Angaben vom Barometerstand abhängen, und diese Thermometer bei genaueren Messungen deshalb für jeden Barometerstand neu geeicht werden müssen. Diese Eichung läßt sich allerdings meist leicht in den Gang des Experimentes einflechten.

Unter der Voraussetzung der Gültigkeit der idealen Gasgleichung findet man folgenden Zusammenhang zwischen der Temperatur *T* in *G* und dem Druck *p*:

$$(3,1) \quad T = \frac{1}{\frac{a}{p} - b},$$

1) Vgl. z. B. K. Mendelssohn, Ztschr. f. Phys. 73. S. 482. 1932.

2) Schäffer und Budenberg.

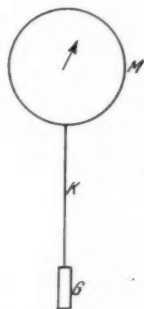


Abb. 13.  
Gasthermometer  
nach Simon

wobei

$$(3,2) \quad a = \frac{p_z}{T_z} \left( 1 + \frac{V_M}{V_G} \right)$$

und

$$(3,3) \quad b = \frac{V_M}{V_G \cdot T_z}$$

ist.  $V_M$  und  $V_G$  sind die Volumina des Manometers  $M$  und des Thermometerraumes  $G$ ,  $p_z$  ist der Druck des Gases bei der Zimmertemperatur  $T_z$ . Die Größen  $a$  und  $b$  erhält man am besten durch Eichung bei zwei definierten Temperaturen.

Aus den eben angeführten Beziehungen ersieht man, daß das Volumenverhältnis  $V_M/V_G$  im wesentlichen die Eichkurve des Gasthermometers bestimmt. Es empfiehlt sich deshalb, zur Wahl eines möglichst günstigen Volumenverhältnisses die erreichten Genauigkeiten des Gasthermometers in Abhängigkeit dieses Verhältnisses zu betrachten. Durch Differentiation von (3,1) erhält man:

$$(3,4) \quad dT = \frac{T_z}{p_z} \frac{\left( 1 + x \frac{T}{T_z} \right)^2}{1 + x} dp.$$

Für  $V_M/V_G$  wurde  $x$  gesetzt. Man sieht aus (3,4), daß der Fülldruck  $p_z$  keinen Einfluß auf die Meßgenauigkeit hat, da die Metall-

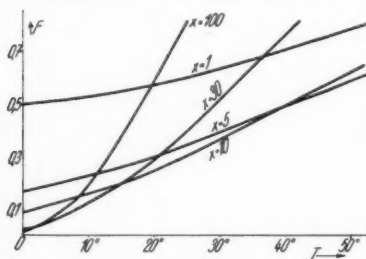


Abb. 14. Die Genauigkeit des Simon-schen Gasthermometers in Abhängigkeit von der Temperatur und von  $V_M/V_G$

manometer lediglich relative Druckänderungen zu messen gestatten. Man hat nur zu beachten, daß kein zu niedriger Fülldruck gewählt wird, da sonst die Adsorption des Füllgases an den kalten Wänden systematische Fälschungen hervorruft. Wesentlich für die Meßgenauigkeit ist der Faktor

$$(3,5) \quad F = \frac{\left( 1 + x \frac{T}{T_z} \right)^2}{1 + x},$$

er wurde deshalb in Abb. 14 für einige  $x$ -Werte dargestellt. Je kleiner  $F$  ist, desto größer ist die Temperaturmeßgenauigkeit. Das Temperaturgebiet von 0 bis etwa  $4^\circ$  entspricht in Abb. 14 nicht der Wirklichkeit, weil hier das Gasthermometer meist als Heliumdampfdruckthermometer wirkt und seine Genauigkeit für alle Werte von  $x$  dann dieselbe ist. Die Meßgenauigkeit läßt sich in diesem Fall aus der Heliumdampfdruckkurve leicht ermitteln. Man sieht,

daß große Meßgenauigkeiten mit großen  $x$ -Werten nur für kleine Temperaturbereiche zu erzielen sind, während kleine  $x$ -Werte eine weniger große Genauigkeit über große Temperaturbereiche liefern. In unserem Fall wurde  $x$  etwa gleich 40 gewählt.

#### § 4. Meßergebnisse

##### Eichung des Gasthermometers

Das Gasthermometer, das bei Zimmertemperatur etwa Atmosphärendruck zeigte, wurde bei der Temperatur des flüssigen Wasserstoffs und dem Eintritt der Supraleitung des Bleidrahtes abgelesen.

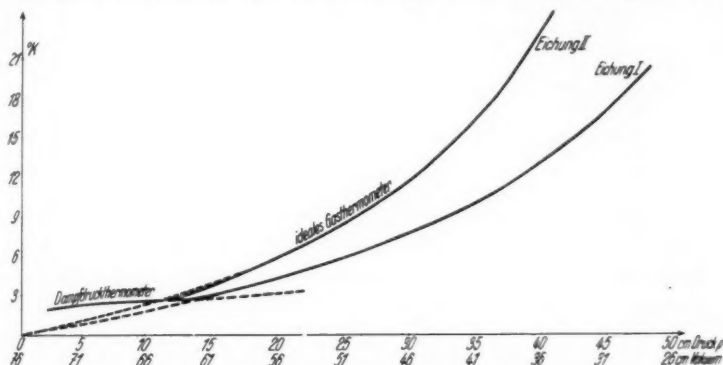


Abb. 15. Die zur Temperaturmessung benutzten Eichkurven

Auf Grund der Ausführungen in § 3 ergibt sich die Eichkurve I der Abb. 15. Der untere gestrichelte Teil der Kurve wurde durch die Dampfdruckkurve des Heliums ersetzt.

##### Wiedergabe einiger Protokolle

In Tab. 1 ist eine Abkühlung in allen Einzelheiten wiedergegeben. 10,8° wurde durch Abpumpen des in HeV kondensierten Wasserstoffs erreicht. Nach wenigen Minuten ist man an dem Punkt angelangt, wo sich Helium zu verflüssigen beginnt. Das komprimierte Helium hatte einen Druck von 35 Atm., das entspannte steht unter 40–50 cm Vakuum, da am Ausgang eine Ölpumpe liegt. Die Angabe des Niederdruckvakuummeters ist recht ungenau. Der Druck von etwa 35 cm für den Verflüssigungspunkt stimmt mit der Angabe unseres Dampfdruckthermometers recht gut überein. Aus der Dampfdruckkurve des Heliums ergibt sich dafür etwa 3,50 K. Der Durchfluß wurde mit einer Gasuhr gemessen, die  $\frac{1}{2}$  Liter gerade noch zu schätzen erlaubte, so daß den Durchflußzahlen keine besondere Genauigkeit zukommt.

Tabelle 1

Zeit in Minuten	Durchfluß in Litern	Temperatur in ° K	<i>HD</i> in Atm.	<i>ND</i> in cm Vak.
0	4,5	10,8	35	65
1	0,5	9,0		60
2	2,5	8,1		50
3	2,5	7,1		45
4	4,0	6,0		45
5	3,5	4,6		45
6	3,5	4,2		45
7	3,5	3,8		45
8	4,5	3,6		45
9	3,5	3,5		45
10	3,5	3,4		40
11	4,5	3,4		45
12	3,5	3,4		40
13	4,0	3,4		40
14	3,5	3,4		40
15	5,0	3,4		40

Tab. 2 zeigt zunächst eine Abkühlung für niedrigen Hochdruck. Die Kälteleistung ist in diesem Fall so klein, daß unter  $5,7^{\circ}$  K die Kälteverluste nicht mehr überwunden werden können und die Temperatur demnach nicht mehr weiter sinkt. Eine Vermehrung des Druckes bringt die Apparatur vollends auf etwa  $3,2^{\circ}$ . Dort wurde etwas Helium verflüssigt, was man daran erkennt, daß nach Sperren der Heliumzufuhr die Temperatur des unter vermindertem Druck siedenden Heliums noch bis auf etwa  $2,5^{\circ}$  fällt (Minute 33–38). Auffallenderweise erwärmt sich der Heliumteil nach Verdampfen des flüssigen Heliums sehr schnell. Innerhalb weniger Minuten steigt die Temperatur wieder auf  $10\text{--}12^{\circ}$ . Obgleich die Wärmekapazität des Heliumteiles nach Entfernen des größten Teiles des gasförmigen Heliums sehr klein ist, führen wir diesen großen Kälteverlust auf die große Temperaturdifferenz zwischen Verflüssigungsgefäß und dem auf der Temperatur der flüssigen Luft befindlichen Topf *T* zurück.

### § 5. Die Kreislaufapparatur

Außer dem bereits beschriebenen Verflüssiger wurde noch eine Anordnung gebaut, die den großen Kälteverlust näher zu untersuchen gestattete und außerdem im Kreislauf geschaltet werden konnte.

Abb. 16 und 17 zeigt diesen Verflüssiger. Der Gegenströmer wurde um ein weiteres Rohrpaar erweitert, das bis zum Heliumverflüssigungsgefäß führt. Es dient dazu den Heliumteil des Gegen-



Tabelle 2

Zeit in Minuten	Durchfluß in Litern	Temperatur in ° K	HD in Atm.	ND in cm Vak.
0	4	9,2		
1	3,5	8,6	10	
2	3,5	8,0	10	
3	3	7,9	9	
4	2,5	7,8	9	50
5	4	7,6	9	
6	3	7,3	10	
7	3	6,8	10	
8	2,5	6,3	12	
9	2,5	5,8	11	
10	2,5	5,7		
11	2	5,7		55
12	2,5	5,8	S	
13	3	5,9		
14	2,5	5,9		
16	3,5	6,3		
17	3	5,6	16	50
18	3,5	5,0	16	45
19	3,0	4,6	14	50
20	4	4,4	17	
21	4	4,1	18	
22	4	3,8	17	
23	4	3,6	17	
24	4	3,4		
25	4	3,3		
26	3,5	3,3		
27	3,5	3,2	16	45
28	4,5	3,2		
29	3,5	3,2		
30	3,5	3,2		
31	4	3,2		
32	4	3,1	15	
33	2,5	2,9		
34	0,5	2,7		50
35		2,6		60
36		2,6		65
37		2,6		70
38		2,5		70
39		2,6		70
39,25		2,7		
39,5	0	2,8	0	
39,75		3,4		
40,0		4,3		
40,25		5,5		
40,5		6,5		75
40,75		7,4		
41		8,3		
41,25		9,3		

strömers auf Wasserstofftemperaturen zu bringen ohne die Heliumleitung mit Wasserstoff zu verseuchen. Bei der zuvor beschriebenen Anordnung verursachten geringe Reste von Wasserstoff in dem Niederdruckteil des Heliumgegenströmers keine Schwierigkeiten, sobald aber der Verflüssiger im Kreislauf wie die üblichen Kühlmaschinen geschaltet werden soll, muß selbstverständlich darauf

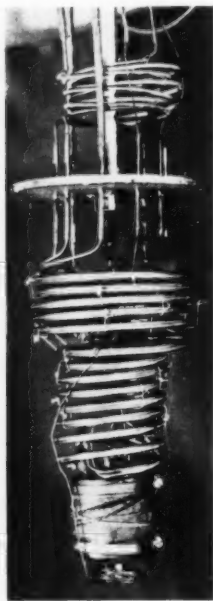


Abb. 16. Der Kreislaufverflüssiger ohne Schutzmantel für den Heliumteil



Abb. 17. Dasselbe wie Abb. 16 mit aufgesetzter Schutzhaube

geachtet werden, daß das „Kältemittel“ Helium völlig rein bleibt. Wir nennen dieses Rohrpaar die Nebenwasserstoffleitung, im Gegensatz zur Hauptwasserstoffleitung, die zur Vorkühlung des Heliums dient und in der ersten Hälfte des Gegenströmers endigt. Knapp hinter der Drossel des Nebenwasserstoffteiles ist auf dem halben Umfang des Deckels ein etwa 4 mm weites Kupferrohr an den Deckel des Verflüssigungsgefäßes angelötet. Es dient dazu, um etwas flüssigen Wasserstoff zu sammeln, der abgepumpt wird, um die Temperatur des Verflüssigungsgefäßes auf etwa  $10-11^{\circ}$  vor Entspannung des Heliums zu senken. Letzteres ist nicht unbedingt nötig, man

kann auch das Helium, von der Temperatur des flüssigen Wasserstoffs ausgehend, entspannen.

Wesentlich ist außerdem der Schutzmantel, der aus dünner Kupferfolie gefertigt ist und mittels einiger am zylindrischen Teil überstehender Laschen an die letzte Windung des Wasserstoffgegenströmers angebracht wird (vgl. Abb. 17). Auf diese Weise wird der Kupferzylinder auf Wasserstofftemperaturen gehalten und der Kälteverlust von der Wasserstoffdrossel zum größten Teil aufgenommen.

Abb. 18 zeigt die Schaltung des Heliumteiles des Verflüssigers.

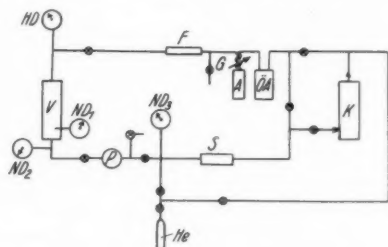


Abb. 18. Die Schaltung des Heliumteiles der Kreislaufapparatur

$K$  ist ein kleiner Heliumkompressor,  $\ddot{O}A$  ein mit Kohle gefüllter Ölabsorber, der die letzten Reste von Öl aus dem Heliumstrom zu entfernen hat (hinter  $K$  liegt schon ein Ölabscheider),  $A$  ebenfalls ein mit Aktivkohle gefüllter Adsorber, der, mit flüssiger Luft eingekühlt, die Aufgabe hat, die geringen Mengen von Luft zu adsorbieren, die durch den Kompressor eventuell in den Heliumkreislauf gelangen.  $G$  ist ein Gegenströmer.  $F$  ein mechanisches Filter, wie es schon früher beschrieben wurde,  $V$  der Verflüssiger,  $P$  eine Ölpumpe, die den Ansaugteil des Heliumkompressors unterstützt. Falls  $K$  genügend saugt, kann  $P$  ruhig wegfallen.  $S$  ist ein Strömungsmesser und  $He$  eine kleine Vorratsflasche zur Aufnahme des Heliums. Nach Beendigung der Versuche werden die Heliumleitungen von Über- und Unterdruck befreit und das Helium in die Flasche  $He$  zurückgepumpt. Das Fassungsvermögen der Apparatur kann bequem unter 10—20 Liter Helium von Normalbedingungen gehalten werden, was äußerst wenig ist.  $HD$  mißt den Druck des komprimierten Heliums,  $ND$  den des entspannten Heliums, insbesondere mißt  $ND_1$  den Druck des Heliums im Verflüssigungsgefäß. Die Lage der Hähne ergibt sich aus folgenden Forderungen: Ausheizen der Adsorber, Auspumpen der Apparatur vor einer Füllung

mit dem Kältemittel, Zurückpumpen des Kältemittels nach *He* nach Beendigung des Versuches. Abb. 18 enthält nur den Heliumkreislauf, die Erörterung der Führung der Haupt- und Nebenwasserstoffleitung erübrigt sich.

Zur Temperaturmessung wurde wieder ein Simonsches Gasthermometer verwendet. Es ergab sich die Eichkurve *II* der Abb. 15. Die Verlängerung der Gasthermometerkurve (mit idealer Gasfüllung!) und die der Dampfdruckkurve wurde gestrichelt gezeichnet. Die beiden eingezeichneten Punkte ergaben sich aus Dampfdruckmessungen im Verflüssigungsgefäß mittels  $ND_1$ , sie sollten den Übergang der beiden Kurven erleichtern. Das Gebiet unterhalb  $5^\circ$  wäre selbstverständlich zu einer genauen Temperaturmessung mit den gemessenen Heliumisothermen statt mit der idealen Gasgleichung zu rechnen. Für unsere Zwecke reicht aber die vorliegende Eichkurve völlig aus.

#### Meßprotokoll

Wir begnügen uns mit der Wiedergabe eines Meßprotokolls in Tab. 3. Das Protokoll beginnt erst bei  $8,6^\circ$ , weil die Abkühlung von der Temperatur des festen Wasserstoffs in sehr kurzer Zeit stattfand. Der Druck *HD* des komprimierten Heliums nimmt deshalb ab, weil der Durchfluß bei abgestelltem Kompressor gemessen wurde, indem das Helium in eine Gummibläse geleitet wurde<sup>1)</sup>. Zwischen Min. 7 und 10 bzw. 16 und 19 wurde der Kompressor eingeschaltet und der Inhalt der Blase wieder komprimiert. Nach 25 Min. wurde die Heliumzufuhr gesperrt und das verflüssigte Helium abgepumpt. *ThV* gibt den im Vakuummeter abgelesenen Druck an, der zur Temperaturmessung dient.

### § 6. Diskussion der Meßergebnisse

#### Die Kälteverluste

Abb. 19 zeigt eine Erwärmungskurve des Verflüssigungsgefäßes ohne den Schutzmantel. Dabei wurden durch die untere Hälfte des Gegenströmers keine Gase geleitet und die Drossel der Hauptwasserstoffleitung immer auf der Temperatur des flüssigen Wasserstoffs gehalten. Man sieht aus dem Gang der Abb. 19 in der Umgebung von  $20^\circ$ , daß die Kälteverluste ihre Ursache in der auf der Temperatur der flüssigen Luft gehaltenen Wand haben müssen. Als Kälteverlust kommen sowohl Wärmeleitung als auch Strahlung in Betracht. Abb. 20 zeigt die Erwärmungskurve der Tab. 3 neben einer Erwärmungskurve der anfänglich beschriebenen Apparatur, die keinen

1) Man erkennt an der starken Abnahme von *HD* das geringe Fassungsvermögen der Apparatur.

Tabelle 3

Zeit in Minuten	Temperatur in ° K	HD in Atm.	ND <sub>1</sub> in cm Hg	ThV in cm Hg
0	8,6	20	68	50,6
1	6,5	19	67	54,5
2	5,0	18	66	58,0
3	4,0	17	66	60,4
4	3,2	16	65,5	62,2
5	2,9	15	65,5	63,2
7	2,7	14	65,5	64,2
10	2,7	18	65	64,4
12		16	64	64,45
14		14	64	64,45
16		12,5		
19	2,7	17		
21		15		
23		13		
24		12		
26	2,7	2	64	64,6
28	2,6	0	64,5	66,0
30	2,5		65,5	67,4
32	2,5		66,5	68,2
34	2,5		67,5	68,8
36	2,4		68,0	69,2
38	2,4		68,5	69,45
39	2,4		69,0	69,50
40	2,4		69,5	69,50
41	2,5		69,5	67,5
42	2,6		69,5	64,8
43	3,6		70	61,3
44	5,0		70	57,8
45	6,6		70	54,3
46	8,0		70,3	51,7
47	9,0		70,3	49,9
50	11,2		71	46,6
53	12,6		72	44,8

Schutzmantel hatte. Auffällig und zunächst befremdend ist der anfängliche fast horizontale Ast der Erwärmungskurven. Er rührt davon her, daß in dem Gasthermometervolumen eine sehr kleine Menge flüssigen Heliums sich gebildet hat, die zunächst verdampft ehe die Temperatur wesentlich ansteigen kann. Auch der lineare Ast der Erwärmungskurve hat seine Ursache in der konstanten spezifischen Wärme der Gasthermometerfüllung, da eine Erwärmung eines Festkörpers wegen des bekannten  $T^3$ -Anstieges der spezifischen Wärme völlig anders ausfallen müßte. In dieser Tatsache erkennt man handgreiflich die mehrfach erwähnte Eigenschaft des Heliums bei tiefen Temperaturen auch bei kleinsten Mengen sämtliche Festkörper bezüglich der Wärmekapazität weit hinter sich zu lassen.

Der fast horizontale Ast der Erwärmungskurve soll uns dazu dienen, den Kälteverlust der Apparatur bei Heliumtemperaturen abzuschätzen. Das im Gasthermometervolumen verflüssigte Helium bleibt bei der Apparatur ohne Schutzmantel durchschnittlich 1 Min. flüssig, der Kälteschutz verdoppelt diese Zeit<sup>1)</sup>. Das gesamte Gas-

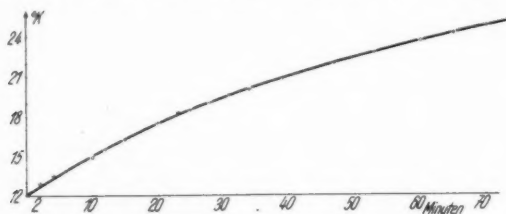


Abb. 19. Erwärmung der Heliumdrossel ohne Schutzmantel

thermometervolumen beträgt  $42 \text{ cm}^3$ , wobei sich etwa  $40 \text{ cm}^3$  auf Zimmertemperatur befinden (Manometervolumen). Das eigentliche Thermometervolumen das sich auf Heliumtemperatur befindet, beträgt  $1,6 \text{ cm}^3$ . Aus diesen Daten und dem Fülldruck des Manometers bei Zimmertemperatur errechnet sich der Kälteverlust für die Apparatur

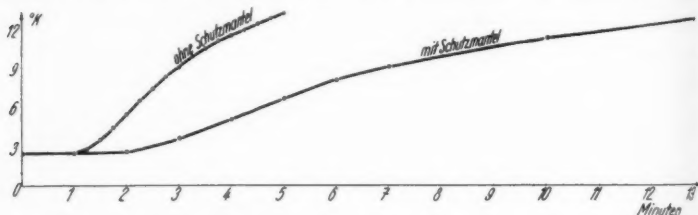


Abb. 20. Erwärmung der Heliumdrossel ohne und mit Schutzmantel

ohne Schutzmantel zu  $0,026 \text{ cal/Min.}$  für die Apparatur mit Schutzmantel zu  $0,010 \text{ cal/Min.}^2)$ .

1) Dabei ist zu beachten, daß im 2. Fall der Fülldruck des Vakuummeters  $ThV$  nur etwa  $59 \text{ cm}$ , bei den Messungen mit der ersten Apparatur dagegen etwa  $76 \text{ cm}$  beträgt.

2) Der Gang der Rechnung ist folgender: aus dem Dampfdruck im Temperaturminimum und dem Fülldruck bei Zimmertemperatur wird die Masse des sich im Thermometervolumen befindlichen Heliums bestimmt. Aus den Größen über Dampfdichte bei den entsprechenden Temperaturen ergibt sich der Anteil flüssigen Heliums im Thermometervolumen im Temperaturminimum und daraus die zur Verfügung stehende Verdampfungswärme. Man zeigt leicht, daß die zur Erwärmung des flüssigen Heliums sowie der Metallteile nötige Wärme klein ist im Vergleich zur Verdampfungswärme des flüssigen Heliums.

Übereinstimmend mit diesen Werten ergaben sich aus dem unteren Teil des linearen Astes der Erwärmungskurven 0,029 bzw. 0,009 cal/Min. als Kälteverlust. Zur Errechnung dieser Größen braucht man nur aus den Druckdaten des Vakuummeters die im Thermometervolumen befindliche Gasmasse zu errechnen. Diese Wärmekapazität ist noch um die des Kupferkörpers  $HeV$  (131 g) zu korrigieren.

#### Die Kälteleistung

In dem in Tab. 3 wiedergegebenen Protokoll wurde von Min. 12 bis Min. 24 Helium verflüssigt, was man an dem konstanten Druck  $ThV$  des Vakuummeters erkennt. Diese Menge wurde von Min. 25 bis Min. 40 abgepumpt. Die dabei frei gewordene Verdampfungswärme wurde fast ausschließlich zur Deckung der Kälteverluste aufgebraucht, da die zur Abkühlung des Heliums nötige Kältemenge demgegenüber verschwindend gering ist. Die Kälteverluste betragen 0,010 cal/Min. die in 12 Min. verflüssigte Menge von He hatte demnach einen latenten Wärmeinhalt (nur Verdampfungswärme!) von 0,15 cal. Der Durchfluß während der Verflüssigung betrug 0,47 Liter Helium von Normalbedingungen pro Minute. Von insgesamt 5,6 Liter Helium, das den Verflüssiger durchströmte, wurden also 0,15 Liter verflüssigt, was einem Wirkungsgrad  $\epsilon$  von 2,7 % entspricht. Der theoretische Wirkungsgrad ergibt sich aus Abb. 5 zu etwa 5 %. Der große Unterschied rührt daher, daß bei dem vorliegenden geringen Durchfluß und dem niedrigen Druck des komprimierten Heliums die effektive Kälteleistung die verhältnismäßig hohen Kälteverluste enthält. Dieses Mißverhältnis zwischen Kälteverlust und Kälteleistung läßt sich selbstverständlich beseitigen, wenn man den Druck des komprimierten Heliums erhöht und außerdem den Durchfluß vergrößert. Man kommt so leicht auf eine 5—10fache Kälteleistung und dementsprechend auch auf den theoretischen Wirkungsgrad.

#### § 7. Schlußbemerkungen

Bei den oben erwähnten Protokollen fällt auf, daß wir selten den Druck der maximalen Ausbeute (etwa 35 Atm.) zur Erregung und Verflüssigung benutzt haben<sup>1)</sup>. In dem Wunsch, den Gesamtaufbau so einfach wie möglich zu machen, wurde versucht mit möglichst niedrigem Druck für das komprimierte Helium auszukommen, damit der Heliumkompressor möglichst wenig Kompressionsstufen benötigt, also möglichst einfach gebaut werden kann. Derselbe Grundsatz ließ uns auch mit möglichst geringem Durchfluß

1) Selbstverständlich wurde auch gelegentlich mit größeren Drucken gearbeitet.



arbeiten. Es wurden also bewußt die notwendigen und hinreichenden apparativen Bedingungen zur Erzeugung von Heliumtemperaturen aufgesucht. Es wurde mehrmals versucht die Apparatur mit so niedrigen Drucken (etwa 8 Atm.) zu erregen, daß nur ein einstufiger Heliumkompressor benötigt wird. Ein endgültiges Urteil darüber soll nicht gefällt werden, bisher ist es mir jedenfalls nicht gelungen mit so niedrigem Druck auf die Temperatur des flüssigen Heliums zu kommen, wenn auch Temperaturen bis etwa  $6^{\circ}$  erreicht wurden (vgl. Tab. 2). Auch wenn es, entgegen der theoretischen Erwartung (vgl. Abb. 4), gelingen sollte die Apparatur auf Heliumtemperaturen zu bringen, so wird die kleine Kälteleistung die Apparatur gegen geringe Störungen in der Isolation äußerst empfindlich machen. Daß dagegen mit äußerst geringem Durchfluß gearbeitet werden kann, wurde in Tab. 3 gezeigt. Ein zweistufiger Heliumkompressor mit sehr kleiner Leistung reicht deshalb für eine Kreislaufapparatur völlig aus.

#### Zusammenfassung<sup>1)</sup>

Nach einer kurzen Übersicht über bekannte Verfahren zur Herstellung von Heliumtemperaturen wird in der Einleitung der grundsätzliche Aufbau einer möglichst einfach arbeitenden Apparatur zur Erzeugung von Heliumtemperaturen angegeben. Das Helium wird dabei in einem kombinierten Gegenströmer, der in seinem ersten Teil mit einem mit Flaschenwasserstoff beschickten Gegenströmer wärmeleitend verbunden ist, durch Drosselung entspannt. In § 1 werden nach Erörterung der Kälteleistung eines einfachen Gegenströmern die zur Berechnung des vorgeschlagenen kombinierten Gegenströmern notwendigen Beziehungen angegeben. Ferner wird gezeigt, wie die Kälteleistung der Apparatur erhöht werden kann. § 2 ist einer eingehenden Betrachtung des Wärmeaustausches der einzelnen Gegenströmerrohre gewidmet. Wie einfache Rechnungen und ein Handversuch veranschaulichen, liegt der hauptsächlichste Wärmewiderstand nicht im Rohrmaterial, sondern in der Grenzschicht des strömenden Gases. Die den Wärmeaustausch im Gegenströmer beherrschenden Größen werden abgeleitet und für die Dimensionierung der vorliegenden Apparatur herangezogen. § 3 enthält Angaben über Aufbau und Betrieb der Apparatur, sowie eine kurze Erwähnung des wichtigsten Zubehörs. Einige Überlegungen über die Genauigkeit des verwendeten Gasthermometers werden mitgeteilt. In § 4 werden

1) Vgl. auch den Bericht eines auf der 45. Hauptversammlung der Deutschen Bunsengesellschaft gehaltenen Vortrags in der Ztschr. f. Elektrochem. im Erscheinen.

Meßergebnisse, in § 5 der Aufbau einer Kreislaufapparatur erwähnt. Bei dieser Apparatur wird, ähnlich wie bei den üblichen Kühlmaschinen, das Helium im Kreislauf durch Verflüssiger und Kompressor gepumpt. Einige Meßergebnisse und Isolationsfragen werden diskutiert und Wege aufgezeigt, wie die Kälteleistung einer solchen Apparatur einfach gemessen werden kann.

Zum Schluß sei es mir gestattet Herrn Prof. Dr. R. Suhrmann für die stete Förderung der vorliegenden Arbeit zu danken. Herrn Prof. Dr. E. Fues danke ich für Diskussionen zum theoretischen Teil der Arbeit, Herrn techn. Amtsgehilfen Kurt Imhof für die saubere und immer einwandfreie Feinmechanikerarbeit. Meiner Frau habe ich für mannigfache Hilfe bei Aufnahme und Ausarbeitung der Messungen zu danken.

Die Deutsche Forschungsgemeinschaft ermöglichte in dankenswerter Weise durch mehrere Leihgaben die Untersuchungen.

Breslau, Physikalisch-Chemisches Institut der Technischen Hochschule und Universität, den 15. November 1940.

(Eingegangen 1. Dezember 1940)

## Über die Elektronenverteilung beim Nicholsschen Versuch

Von Franz Wolf

(Mit 1 Abbildung)

Der Versuch von Nichols<sup>1)</sup>, zwischen Achse und Peripherie einer rasch rotierenden Aluminiumscheibe eine durch „Zentrifugierung“ der Leitungselektronen auftretende Potentialdifferenz nachzuweisen, blieb ohne sicheren Erfolg, da Kontaktstörungen den zu erwartenden Effekt verdeckten. Für eine Scheibe von  $R = 10$  cm Radius und der extremen Randgeschwindigkeit  $v = 200$  m/sec. liefert einfache Überschlagsrechnung<sup>2)</sup> sowie genau durchgeführte Theorie<sup>3)</sup> auch nur

$$\varphi(R) - \varphi(0) = - \frac{\mu \omega^2}{2e} R^2 = - 3,79 \cdot 10^{-10} \text{ elst. E.} = - 1,14 \cdot 10^{-7} \text{ Volt,}$$

( $\frac{e}{\mu}$  spezifische Elektronenladung,  $\omega$  = Winkelgeschwindigkeit,) einen Wert, der selbst ohne die unvermeidlichen Kontaktschwierigkeiten auch mit heutigen Mitteln als Spannung kaum nachweisbar wäre. — Bonetto hat neuerdings gezeigt<sup>4)</sup>, daß auch die magnetische Wirkung, die durch Rotation der getrennten Ladungen hervorgerufen wird, längst nicht ausreicht, um unmittelbarer Messung zugänglich zu sein, um die leichte Beweglichkeit der Leitungselektronen mittels der Zentrifuge etwa so nachzuweisen.

Es wurde aber offenbar noch nicht diskutiert, — was viel aussichtsreicher erscheint, — wie weit man dem Zentrifugierungseffekt durch unmittelbare Erfassung der *Ladungen* beikommen kann. Denn unsere Methoden zur Messung kleiner Elektrizitätsmengen sind ja ganz besonders empfindlich. Es würde keine unüberwindlichen Schwierigkeiten machen, z. B. mittels des Hoffmanelektrometers Ladungen von nur einigen hundert Elektronen zu untersuchen. Man müßte etwa ein peripheres Stück der Metallscheibe während der raschen Rotation, mit Elektronen angereichert, vom übrigen Körper abtrennen und damit nach Anhalten der Zentrifuge ein

1) E. F. Nichols, Phys. Ztschr. 7. S. 640. 1906.

2) Neben Nichols z. B. auch H. A. Lorentz, Vorlesungen Bd. II. § 38.

3) G. Bonetto, Rend. Lomb. 70. S. 444. 1937.

4) G. Bonetto, Rend. Lomb. 71. S. 252. 1938.

Elektrometer aufladen. — Zwar hat sich gezeigt<sup>1)</sup>, daß die Anreicherung der Elektronen im unteren Teil eines Metallkörpers, der der Schwerkraft unterliegt, viel zu gering ist, um einer derartigen Messung zugänglich zu sein. Doch ist zu bedenken, daß die Beschleunigung, die bei der Schwerkraft kaum  $10^3$  cm/sec<sup>2</sup> beträgt, bei einer modernen Zentrifuge mit den oben angegebenen extremen Daten bis auf etwa  $4 \cdot 10^7$  cm/sec<sup>2</sup> gesteigert werden kann, was die Verhältnisse möglicherweise wesentlich ändert.

Die Verteilungsfunktion der überschüssigen Elektronen auf verschiedene Radien folgt leicht aus den Abhandlungen von Bonetto, der sie zu der genannten magnetischen Untersuchung implizite benutzte, ohne sie selbst zu diskutieren. An Stelle einer Scheibe setzt die Rechnung vereinfachend einen rotierenden Zylinder von unbegrenzter Länge voraus. Ist  $n^+$  die überall konstante Anzahl positiver Atomreste in der Volumeinheit und  $n^-(r)$  die Gesamtzahl der Leitungselektronen pro Kubikzentimeter im Abstand  $r$  von der Zylinderachse, so findet sich unter Verwendung der Fermistatistik für den Elektronenüberschuß  $n(r) = n^-(r) - n^+$  pro Kubikzentimeter der Ausdruck

$$(1) \quad n(r) = \frac{\beta A^{3/4} R^{3/4}}{\sqrt{2\pi e} e^{\sqrt{A} R}} J_0(i\sqrt{A} r) - \frac{\beta}{\pi e}$$

mit

$$A = \frac{3^{1/4} 2^4 \pi^{2/3} \mu e^2 n^{+1/3}}{h^2} = 3,25 \cdot 10^{16} \text{ elst. E.}, \quad \beta = \frac{\mu \omega^2}{2e} = 3,79 \cdot 10^{-12} \text{ elst. E.}$$

und  $J_0$  der Besselschen Funktion nullter Ordnung mit rein imaginärem Argument. Die Zahlenwerte ergeben sich unter der Voraussetzung der oben angegebenen Daten  $R = 10$  cm und  $v = 200$  m/sec, wobei allerdings zur Erhöhung des Effekts als Metall Kupfer anstatt Aluminium gewählt ist. Für andere Metalle würde sich nur  $n^+$  unwesentlich ändern. Die Lösung  $n(r)$  wird auf einem ähnlichen Näherungsweg gefunden wie diejenige des Schwereproblems und dürfte mit ähnlich guter Genauigkeit den Sachverhalt darstellen wie diese. Zur Diskussion der Mengenverteilung läßt sich für

$$\sqrt{A} r \gg 1 \quad J_0 \approx \frac{e^{\sqrt{A} r}}{\sqrt{2\pi A^{1/4} r^{1/2}}}$$

schreiben. Für kleine Beträge des Arguments muß man die Reihe für  $J_0$  heranziehen. Da aber  $\sqrt{A} = 1,80 \cdot 10^8$ , also für Kupfer ebenso wie für andere Metalle sehr groß ist, so reicht die erste

1) F. Wolf, Ann. d. Phys. [5] 38. 385. 1940. Im folgenden als „Schwereproblem“ zitiert.

Darstellung gut bis herunter zu etwa  $r = 10^{-6}$  cm aus, d. h. praktisch bis unmittelbar an die Rotationsachse selbst heran.

Im Einzelnen berechnet man für die Peripherie die Dichte

$$(2) \quad n(R) = \frac{\beta}{\pi \varepsilon} \left( \frac{R \sqrt{A}}{2} - 1 \right) = 2,27 \cdot 10^6 / \text{cm}^3.$$

Der Zahlwert bezieht sich auf das gewählte Beispiel und stellt damit wie die folgenden ungefähr die Grenze dessen dar, was praktisch überhaupt erreichbar ist. Für Radien kleiner als  $R$  nimmt das erste Glied der Dichteformel (1) wegen des großen Wertes  $\sqrt{A}$  außerordentlich rasch gegen Null ab, so daß neben dem Elektronenüberschuß in der Randzone weiter innen — bis in die Achse selbst — bald nur der konstante Mangel an Elektronen,

$$n(r \ll R) = - \frac{\beta}{\pi \varepsilon} = - 2,51 \cdot 10^{-3} / \text{cm}^3$$

übrig bleibt. Der Verlauf von  $n(r)$  hat also den Charakter der Kurve von Abb. 1. Quantitativ richtig läßt er sich allerdings nicht



Abb. 1. Charakter der Mengenverteilung

zeichnen. Die Kurve mündet in Wirklichkeit in den oben berechneten Dichtewert  $n(R)$  auf der Peripherie mit dem außerordentlich großen Differentialquotienten

$$n'(R) = \frac{\beta A}{2\pi \varepsilon} \left( R - \frac{1}{2\sqrt{A}} \right) = 4,09 \cdot 10^{14},$$

also mit ungeheuer steiler, fast senkrechter Tangente ein. Der Abstand des Durchstoßpunktes  $r_t$  der Tangente durch die Abszissenachse vom Punkt  $R$  beträgt nur

$$R - r_t = 0,56 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

Dagegen findet man für die Lage des Punktes  $r_0$ , in dem die Dichtekurve die Abszissenachse schneidet,

$$R - r_0 = 11,45 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

Eine Anreicherung von Elektronen durch die Zentrifugalkräfte findet also nur innerhalb einer sehr dünnen Schicht von der Dicke einiger Atomdurchmesser unmittelbar unter der Metalloberfläche statt. Ihr steht weiter innen eine im ganzen Körper praktisch konstante Verarmung gegenüber.

Die Verteilung hat damit große Ähnlichkeit mit derjenigen, die entstünde, wenn man einen im Körper überall konstanten positiven Raumladung der Dichte  $\varrho = -\epsilon n$  ( $r \ll R$ ) =  $\frac{\beta}{\pi}$  auf der Zylinderoberfläche eine insgesamt gleich große negative Flächenbelastung gegenüberstellte. In der Tat berechnet man leicht für die Potentialverteilung im Körper bei einer solchen Ladungsanordnung

$$\varphi(r) = \text{Konst.} - \beta r^2,$$

d. h. einen Ausdruck, den Bonetto bis auf ein um viele Größenordnungen kleineres Zusatzglied auch für das Potential innerhalb der Nicholschen Zentrifuge ausrechnete.

Für die eingangs aufgeworfene Frage, ob bei der Zentrifugierung meßbare Elektrizitätsmengen auftreten, liefert zunächst Gl. (2) auf der Zylinderoberfläche selbst die statische Elektronendichte von über  $2 \cdot 10^6/\text{cm}^2$ , einen Betrag, der den entsprechenden von  $55,8/\text{cm}^2$  beim Schwereproblem weit übertrifft und der, falls nur ein derartiges Kubikzentimeter wirklich zur Verfügung stünde, zu bequemer Messung ausreichen würde. Tatsächlich fällt aber die Elektronendichte, wenn  $r$  von  $R$  gegen Null abnimmt, so steil ab, daß die Gesamtzahl der unter einem Quadratzentimeter der Zylinderoberfläche wirklich angereicherten Elektronen,

$$N = \int_{r_0}^R n(r) dr,$$

nur sehr klein wird. Streng läßt sich dieser Ansatz für  $N$  nicht auswerten, da die in  $n(r)$  steckende Funktion  $\frac{eV_A r}{Vr}$  nicht geschlossen integrierbar ist. Man erhält aber einen — offensichtlich zu großen — Näherungswert, wenn man statt des Integrals über die Kurve  $n(r)$  in Abb. 1 den Inhalt des aus  $(R - r_0)$  als Grundlinie und  $n(R)$  als Höhe gebildeten Dreiecks benutzt. So ergibt sich

$$N \approx \frac{1}{2} (R - r_0) n(R) = 0,13/\text{cm}^2.$$

Die pro Quadratzentimeter verfügbare Elektronenmenge ist also, wenn auch unvergleichlich viel größer als beim Schwereproblem, doch noch immer sehr klein und unmittelbarer Messung unzugänglich.

Wesentlich günstiger gestalten sich die Verhältnisse, wenn man vom rotierenden unendlich langen Zylinder zu einer eigentlichen Metallscheibe übergeht. Man kann — in weitgehender Analogie zu den Überlegungen beim Schwereproblem — unter sonst gleichen Bedingungen für die Scheibe annähernd dieselbe Potentialdifferenz zwischen Achse und Peripherie erwarten wie beim Zylinder. Zu ihrer Aufrechterhaltung müssen in der Scheibe aber unvergleichlich

viel mehr Elektronen/cm<sup>2</sup> nach außen wandern als im unbegrenzten Zylinder. So dürfte eine Anreicherung entstehen, die — wenn auch möglicherweise noch unter Schwierigkeiten — doch experimentell meßbar sein kann. Quantitative Aussagen hierüber wird allerdings erst die strenge Durchrechnung des räumlichen Problems der rotierenden Scheibe gestatten.

#### Zusammenfassung

Die Verteilung der Leitungselektronen, die sich unter der Wirkung der Fliehkraft beim Nicholschen Versuch einstellt, wird diskutiert im Anschluß an eine Arbeit von G. Bonetto für den Fall, daß der rotierende Körper ein Metallzylinder von unbegrenzter Länge ist. Eine Anreicherung von Elektronen findet nur innerhalb einer Schicht der Dicke einiger Atomdurchmesser unmittelbar unter der Zylinderoberfläche statt, während der ganze übrige Körper eine entsprechende, räumlich praktisch konstante Verarmung an Elektronen erfährt.

Während die Aufladung bei dem Metallzylinder quantitativ noch sehr gering ausfällt, darf man auf Grund ganz allgemeiner Überlegungen bei einer Metallscheibe, deren Dicke klein gegen den Radius ist, eine wesentlich größere Elektronenanhäufung in der Nähe der Peripherie erwarten, die möglicherweise sogar elektrometrisch erfaßbar sein wird.

Karlsruhe i. B., Technische Hochschule.

(Eingegangen 20. Dezember 1940)





Jonathan Zenneck zum siebzigsten Geburtstag

15. April 1941